Capítulo 5

Series numéricas y series funcionales.

El concepto matemático de *serie o suma infinita* se define como la suma de los términos de una sucesión, que puede ser numérica o de funciones. Un ejemplo sencillo de serie funcional es el polinomio de Taylor que hemos introducido en el tema anterior, que no es otra cosa que una serie de potencias que nos permite aproximar funciones en el entorno de un punto y simplificar así problemas físicos. A la hora de definirlo hemos asumido que la función admitía derivadas hasta un orden n en dicho punto, de modo que el polinomio tiene un número finito de términos más un resto que cuantifica el error que se comete en la aproximación; pero está claro que si la función fuese infinitamente derivable podríamos construir una *suma infinita* de potencias que coincidiría con la función en el entorno del punto considerado (siempre y cuando el resto, que va con la derivada n-ésima, se haga cero cuando $n \to \infty$).

La serie de Taylor no es la única forma de aproximar una función mediante una serie funcional. Otro ejemplo son las series de Fourier, que se estudian en Métodos Matemáticos III y que son fundamentales para el estudio de todos aquellos fenómenos físicos que tienen un carácter ondulatorio y están descritos mediante funciones periódicas. Además, es importante resaltar que las series numéricas y las series funcionales no son meras herramientas de aproximación, y que el estudio de sistemas físicos en los que la energía está cuantizada en niveles discretos (un ejemplo sencillo sería los niveles de energía de los electrones en un átomo), como ocurre en Mecánica Cuántica, Mecánica Estadística, etc., muchas veces implica intrínsecamente el cálculo de series. Por último, cabe recordar de nuevo que como hemos indicado en el tema anterior la mayor parte de los fenómenos físicos se describen mediante ecuaciones diferenciales. Como estudiaréis en Métodos Matemáticos IV uno de los métodos de resolución de ese tipo de ecuaciones se basa en un tipo especial de series funcionales, denominado series de potencias, cuyas propiedades estudiaremos al final de este tema.

Comenzaremos este tema definiendo el concepto de serie numérica y relacionando su convergencia, en el caso de que la serie sea infinita, con la de la sucesión de sumas parciales. Estos aspectos básicos nos permitirán establecer a continuación algunos de los criterios fundamentales para la convergencia de series, como la condición de Cauchy o la necesidad (pero no suficiencia) de que el término general tienda a cero. Seguidamente se introducirán algunos tipos de series que, por sus características, son particularmente interesantes a la hora de estudiar su convergencia: Las series telescópicas, la progresión geométrica, las series que pueden obtenerse a partir de otras introduciendo o suprimiendo paréntesis y las series alternadas. En este último caso discutiremos con más detalle los dos tipos de convergencia que pueden presentar (absoluta y condicionada).

Continuaremos desarrollando el contenido del capítulo presentando algunos de los criterios más básicos que permiten determinar la convergencia o no de las series numéricas: Comparación directa, comparación por paso al límite (incluyendo el criterio de Pringsheim como caso particular), criterio de la integral, criterio del cociente, criterio de la raíz, criterio de Dirichlet, y criterio de Leibniz (este último para series alternadas). Finalizaremos esta parte del tema dedicada a las series numéricas definiendo y estudiando las propiedades de la reordenación de series y discutiendo mediante algunos ejemplos la utilidad del desarrollo en serie de Taylor para el cálculo de la suma de algunas series numéricas, en especial aquellas que se corresponden al valor de la función exponencial en determinados puntos.

Seguidamente abordaremos el estudio de las propiedades de las series formadas por funciones, haciendo especial hincapié en las series de potencias. Presentaremos en primer lugar la definición de función límite de una sucesión de funciones, discutiendo sus propiedades a partir de las características de las funciones de la sucesión (continuidad, derivabilidad, etc.) dependiendo de si la convergencia es puntual o uniforme. Tras establecer la condición de Cauchy para la convergencia uniforme de las sucesiones funcionales, podremos introducir el concepto de serie funcional uniformemente convergente y sus correspondientes criterios de convergencia (de Cauchy y mayorante de Weirstrass). Finalizaremos el tema discutiendo las características principales de las series de potencias, un caso particular de series funcionales para el que estudiaremos sus radios de convergencia y propiedades con respecto a la derivación, prestando especial atención a aquellas que se pueden obtener a partir de las derivadas de una función utilizando el teorema de Taylor.

5.1. Series numéricas infinitas.

Definición 69 *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. A partir de ella podemos construir una nueva sucesión $\{s_n\}$ cuyo elemento n-ésimo viene dado por*

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

El par ordenado de sucesiones $(\{a_n\}, \{s_n\})$ se llama serie infinita. No obstante, se suele designar las series utilizando únicamente a_n (que recibe el nombre de término general) mediante los símbolos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ o $\sum a_k$.

El número s_n se llama suma parcial n-ésima de la serie. Se dice que una serie converge si la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ converge a un número real finito s. En tal caso al número s se le denomina suma de la serie y se escribe que $\sum a_k = s$. Si $\{s_n\} \longrightarrow \pm\infty$, se dice que la serie es divergente. En otras palabras, lo que estamos diciendo es:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \{s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\}$$

Si una serie no converge a ningún número real y tampoco tiende a $+\infty$ o $-\infty$, se denomina serie oscilante o no sumable.

Teorema 71 *Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series convergentes y $a = \sum a_n$, $b = \sum b_n$ sus correspondientes sumas. Entonces, para cada par de constantes α y β la serie $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ converge hacia la suma $\alpha a + \beta b$, es decir,*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha a + \beta b$$

Demostración: Es trivial, basta darse cuenta de que las sumas parciales n-ésimas verifican

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k$$

y aplicar el límite cuando $n \longrightarrow \infty$ en esta igualdad. Se obtiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) := \lim_{n\to\infty} \{s_n\} = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \alpha a + \beta b$$

Teorema 72 *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales tal que $a_n \geq 0$ para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$ Entonces la serie $\sum a_n$ converge si, y sólo si, la sucesión de sumas parciales está acotada superiormente.*

Demostración:

"$\Rightarrow$" El punto de partida es que $\sum a_n$ es convergente y hemos demostrar que la suscesión de sumas parciales, $\{s_n\} = \{\sum_{k=1}^{n} a_k\}$, está acotada superiormente: Como $a_n \geq 0$ para todo n, entonces está claro que $\{s_n\}$, es monótona creciente y está acotada inferiormente por 0. Además, si la serie es convergente, ello implica por definición la sucesión de sumas parciales s_n es convergente. Según uno de los primeros teoremas enunciados en el Tema 3 (teorema 30). Una sucesión convergente está acotada siempre por su límite (que además es punto de acumulación del recorrido de la sucesión). Al ser s_n monótona creciente, es evidente que ese límite la acotará superiormente.

"$\Leftarrow$" LAhora la hipótesis de partida es que s_n está acotada superiormente y hemos de probar que $\sum a_n$ es convergente: Como en la demostración en el otro sentido, también sabemos que al ser los $a_n \geq 0$ para todo n, s_n es monótona creciente. En uno de los ejercicios del Tema 3 se demuestra que toda sucesión de números reales monótona creciente y acotada superiormente es de Cauchy. Como $\mathbb{R}$ es un espacio completo, toda sucesión de Cauchy es convergente. Por lo tanto la sucesión de sumas parciales s_n es convergente y, por definición, la serie $\sum a_n$ también lo es. □

Teorema 73 *(Condición de Cauchy para series). Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. La serie $\sum a_n$ converge si, y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que si $n > N$ se verifica que*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon \qquad \forall\, p = 1, 2, 3 \ldots$$

Demostración:

"$\Rightarrow$" La hipótesis es que la serie $\sum a_n$ converge. Entonces, por definición, la sucesión de sumas parciales de esa serie, $\{s_n\} = \{\sum_{k=1}^{n} a_k\}$, también converge. Como está sucesión es de números reales y $\mathbb{R}$ es un espacio completo, también es de Cauchy. Como sabemos, ello implica que sus términos se pueden aproximar tanto como se quiera, esto es, que para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que $|s_m - s_n| < \varepsilon$ si $m, n > N$. Supongamos que $m > n$. Como ambos son enteros, m se puede escribir como $m = n+p$ con $p = 1, 2, 3 \ldots$. Como $|s_{n+p} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}|$, el teorema en esta dirección queda demostrado.

"$\Leftarrow$" Se trata de deshacer el razonamiento anterior. Ahora el punto de partida es que para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que si $n > N$ se verifica que $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon \quad \forall\, p = 1, 2, 3 \ldots$. Como hemos visto $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| = |s_{n+p} - s_n|$, y por lo tanto $|s_{n+p} - s_n|$ es también menor que ε para todo $p = 1, 2, 3 \ldots$. Llamando $m = n + p$ concluimos que para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que si $m, n > N$ se verifica que $|s_m - s_n| < \varepsilon$. Ello quiere decir que la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ es de Cauchy y por lo tanto convergente, pues está formada por números reales y $\mathbb{R}$ es completo. Por último, si la sucesión de sumas parciales es convergente, la serie $\sum a_n$ también lo es.□

Teorema 74 *Una condición necesaria para que la serie $\sum a_n$ sea convergente es que su término general tienda a cero, esto es, que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Demostración: Si la serie es convergente verifica el teorema anterior (teorema 73). Al aplicarlo para $p = 1$ obtenemos que $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n > N \implies |a_{n+1}| < \varepsilon$, lo cual no es otra cosa que la definición de $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. □

Observación. La anterior es una condición necesaria, pero no suficiente. De hecho, lo que acabamos de ver es que una serie cuyo término general tiende a cero cumple la condición de Cauchy para $p = 1$. Sin embargo, tal y como indica el teorema 73, para garantizar la convergencia esta condición tiene que verificarse para todo p y esto no siempre ocurre aunque $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Un ejemplo es la denominada serie armónica[1], $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, que claramente cumple $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ y sin embargo no converge. Se puede comprobar fácilmente que no converge poniendo $n = 2^m$ y $p = 2^m$ en la condición de Cauchy:

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} = \frac{1}{2^m+1} + \frac{1}{2^m+2} + \ldots + \frac{1}{2^m+2^m} >$$
$$> \frac{1}{2^m+2^m} + \frac{1}{2^m+2^m} + \ldots 2^m \text{ veces} \ldots + \frac{1}{2^m+2^m} = \frac{2^m}{2^m+2^m} = \frac{1}{2}$$

[1]El nombre de serie armónica se debe a que cada uno de sus términos es la media armónica de los términos anterior y siguiente a él. Se llama media armónica de dos números p y q al número α que verifica $\frac{2}{\alpha} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. En general, la media armónica de n números, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, se define como $H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$.

Por lo tanto, la cantidad $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}|$ nunca se hace más pequeña que $1/2$ para ese valor concreto de p, independientemente de lo grande que sea $n \Rightarrow$ para valores de $\varepsilon \leq 1/2$ ese valor de p no verificaría la condición de Cauchy y la serie no es convergente.

5.2. Series telescópicas y series geométricas.

Como hemos visto, que una serie sea convergente o no depende directamente de que la sucesión de sus sumas parciales sea convergente o no. Además, cuando es convergente, la suma de la serie coincide con el límite cuando $n \to \infty$ de la sucesión de sumas parciales. Por lo tanto, el método general para estudiar la convergencia y calcular la suma de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no es otro que intentar obtener el termino general de la sucesión $\{s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\}$ y calcular su límite. Sin embargo, escribir s_n de forma explícita como una función de n sobre la que aplicar el límite no siempre es fácil, y en muchos casos ni siquiera es posible. Existen métodos alternativos a éste método genérico que permiten estudiar la convergencia de una serie de un modo más sencillo. No obstante, esos métodos los dejaremos para más adelante y a continuación presentaremos dos tipos de series, las series telescópicas y las series geométricas, para las que sí es posible calcular explícitamente s_n y por lo tanto estudiar su convergencia y calcular su suma aplicando el método general.

Teorema 75 *(Series telescópicas). Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que $a_n = b_{n+1} - b_n$ para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$ Entonces la serie $\sum a_n = \sum (b_{n+1} - b_n)$ converge si, y sólo si, la sucesión $\{b_n\}$ es convergente (esto es, existe el $\lim_{n\to\infty} b_n = b$), en cuyo caso se verifica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - b_1 = b - b_1$$

Demostración: En efecto, para este tipo de series es muy sencillo obtener la sucesión de sumas parciales:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_{k+1} - b_k) = (b_{n+1} - \cancel{b_n}) + (\cancel{b_n} - \cancel{b_{n-1}}) + (\cancel{b_{n-1}} - \cancel{b_{n-2}}) + \cdots + (\cancel{b_2} - b_1) = b_{n+1} - b_1 \implies$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n) = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (b_{n+1} - b_1) = \lim_{n\to\infty} b_n - b_1$$

Ejemplo:

Consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Se trata de una serie telescópica puesto que:

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = b_{n+1} - b_n, \quad \text{donde hemos definido} \quad b_n = -\frac{1}{n}$$

Aplicando este teorema tendríamos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b - b_1 = 1, \quad \text{porque} \quad b_1 = -1 \text{ y } b = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0$$

Definición 70 *(Series geométricas). Se denomina serie geométrica de razón $r \in \mathbb{R}$ y primer término a, a la serie*

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

Teorema 76 *La serie geométrica $\sum ar^n$ converge si, y sólo si, se cumple $|r| < 1$, en cuyo caso su suma es*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

Demostración: Para este tipo de series también es sencillo calcular explícitamente s_n del siguiente modo:

$$\left.\begin{array}{rcll} s_n & = & a+ & ar + ar^2 + \ldots + ar^n \\ rs_n & = & & ar + ar^2 + \ldots + ar^n + ar^{n+1} \end{array}\right\} \text{ restando tenemos:}$$

$$s_n(1-r) = a - ar^{n+1}, \qquad s_n = a\frac{1-r^{n+1}}{1-r} \qquad \text{si } r \neq 1$$

Por lo tanto, al hacer $\lim_{n\to\infty} s_n$, hay las siguientes posibilidades:

(a) $|r| < 1$. Entonces $\lim_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a}{1-r}$

(b) $|r| > 1$. Si r es positivo entonces $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ y la serie es divergente. Si r es negativo, la sucesión $\{s_n\}$ no tiene límite, pues aunque sus términos se hacen cada vez más grandes van cambiando de signo (positivos si n es impar y negativos si n es par). La serie es oscilante o no sumable (ni convergente ni divergente).

(c) $|r| = 1$. Si $r = -1$ entonces $s_n = a\frac{1-r^{n+1}}{2}$. Por lo tanto, $s_n = 0$ si n es impar y $s_n = a$ si n es par. La serie es oscilante o no sumable (ni convergente ni divergente). Si r=1 la expresión $s_n(1-r) = a - ar^{n+1}$ no se puede dividir por $(1-r)$ tal y como hemos indicado. Sin embargo en ese caso es fácil darse cuenta de que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a\sum_{n=0}^{\infty} 1$ y por lo tanto es divergente.

Por lo tanto, como queríamos demostrar, $\sum ar^n$ converge si, y sólo si, se cumple $|r| < 1$, en cuyo caso su suma es $\dfrac{a}{1-r}$.

5.3. Introducción y supresión de paréntesis en las series.

Consideremos la serie $\sum(-1)^{k+1}$. En principio es una serie oscilante (o no sumable) y por lo tanto no converge ni diverge, pues es inmediato comprobar que los términos de la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ van tomando de forma alternativa los valores 0 y +1. Sin embargo, a partir de esta serie se puede obtener una serie convergente sin más que agrupar los sumandos parejas y sumarlos dos a dos. Mediante este procedimiento se obtendría una serie de "ceros", que evidentemente es convergente, tal y como se muestra a continuación:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \qquad \overbrace{\Rightarrow}^{\text{introduciendo paréntesis}}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{introduciendo paréntesis}} \qquad (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots$$

Este ejemplo sencillo ilustra que una "introducción de paréntesis" en una serie infinita puede alterar el resultado de su suma (una supresión de paréntesis también lo haría, lógicamente), e incluso su carácter convergente o divergente, algo que no ocurre con las sumas finitas. En otras palabras, *las sumas infinitas no siempre verifican la propiedad asociativa.* Más adelante en este tema veremos que otras propiedades de las sumas finitas, como la conmutativa, tampoco se cumplen siempre en las series infinitas.

En cursos anteriores se trataba esta cuestión en detalle, estudiando los teoremas que establecen cuando la introducción o la supresión de parentesis modifican el carácter de una serie y cuando no. La razón de abordar detalladamente esta cuestión era que la introducción y supresión de paréntesis se usaba como herramienta para demostrar la regla de convergencia de las series alternadas, que son aquellas cuyos términos cambian de signo alternativamente. Sin embargo, dicha regla de convergencia también se puede demostrar sin necesidad de utilizar los mencionados teoremas sobre la introducción y supresión de paréntesis en series. Por ese motivo, y por simplicidad, se ha decidido eliminar el contenido de esta sección y reducirla a simplemente ilustrar el hecho de que las series infinitas no siempre verifican la propiedad asociativa.

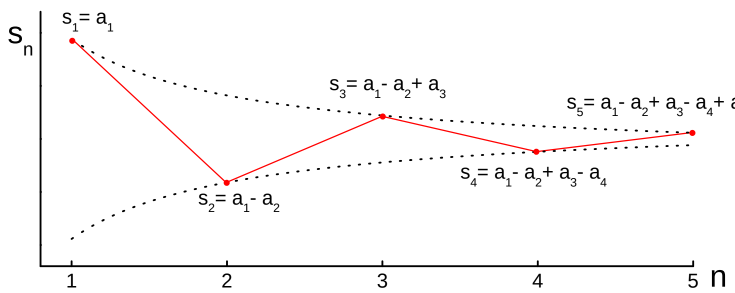
5.4. Series alternadas.

Definición 71 *Si $a_n > 0$ para todo n, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ se denomina serie alternada.*

Teorema 77 *(regla de Leibniz). Si $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente de términos positivos que converge a cero, entonces la serie alternada que se construye a partir de ella, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, también converge.*

Este teorema nos dice que si el valor absoluto del término general de una serie alternada tiende a cero, entonces esa serie alternada es automáticamente convergente. En otras palabras, eso quiere decir que la condición necesaria para que una serie sea convergente (que el término general tienda a cero) es también suficiente en el caso de series alternadas. Insistir que, como indica el teorema, el límite ha de calcularse sobre el valor absoluto del término general y que, además, se ha de comprobar que éste es decreciente.

Demostración: Es muy fácil convencerse intuitivamente de la convergencia, porque si representamos frente a n la sucesión de sumas parciales ésta sigue una "trayectoria en zigzag" con oscilaciones cada vez más pequeñas, tal y como indica la siguiente figura



Comenzamos en $n = 1$ con $s_1 = a_1$. La siguiente suma parcial corresponde a $n = 2$ y es $s_2 = a_1 - a_2 < s_1$. A continuación para $n = 3$ viene la tercera suma parcial: $s_3 = a_1 - a_2 + a_3 < s_1$. Es evidente que $s_3 > s_2$, pero además $s_3 < s_1$ porque al ser a_n monótona decreciente a_2 (que aparece restando) es más grande que a_3 (que se suma). Después para $n = 4$ tendríamos $s_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4$, que es claramente menor que s_3, pero como a_n es decreciente, $a_3 > a_4$, y por tanto $s_4 > s_2$. Esto es generalizable para cualquier n par, esto es $s_{2n} > s_{2n-2}$, lo que indica que la subsucesión de sumas parciales con índice par es creciente. Del mismo modo se puede deducir que la subsucesión de sumas parciales con índice impar es decreciente. Ambos comportamientos se ilustran en la figura con las curvas punteadas. Además, tal y como hemos visto hasta $n = 4$, las sumas parciales impares son siempre mayores que las pares. Por eso, al representar s_n frente a n lo que obtenemos es el zigzagueo cuya amplitud tiende a cero (debido a que $a_n \to 0$) que se observa en la figura, de donde se intuye la convergencia. A continuación formalizaremos esta idea, demostrando que las series alternadas verifican la condición de Cauchy para la convergencia de series (Teorema 73).

Comenzamos entonces recordando dicha condición de Cauchy para la convergencia de series. Como la notación a_n ya la estamos utilizando para el término general de la serie alternada que vamos a estudiar, la escribimos para una serie genérica de término general b_n. La condición de Cauchy (Teorema 73) establece que si $\{b_n\}$ es una sucesión de números reales, la serie $\sum b_n$ converge si, y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que si $n > N$ se verifica que

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{n+p}| < \varepsilon \qquad \forall\, p = 1, 2, 3 \ldots$$

Llamando $m = n + p$, esta condición podría reescribirse del siguiente modo:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ /\ |b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_m| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} b_k\right| < \varepsilon \text{ si } n, m > N$$

Por lo tanto, lo que vamos a hacer es calcular la cantidad $\left|\sum_{k=n+1}^{m} b_k\right|$, tomando como b_k el término general de nuestra serie alternada (es decir $b_k = (-1)^{k+1}a_k$) y viendo si se puede hacer tan pequeña como uno quiera a partir de un cierto N:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} b_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} (-1)^{k+1} a_k\right| = \left|(-1)^{n+2} a_{n+1} + (-1)^{n+3} a_{n+2} + (-1)^{n+4} a_{n+3} + \cdots + (-1)^{m+1} a_m\right| =$$

$$= \left|(-1)^{n+2}\left(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} \cdots + (-1)^{m-n-1} a_m\right)\right|.$$

Antes de continuar, analicemos el último sumando. En primer lugar hay que tener en cuenta que $(-1)^{-1} = -1$, por lo que $(-1)^{m-n-1} a_m = -(-1)^{m-n} a_m$. Además, dentro del valor absoluto también podemos obviar el $(-1)^{n+2}$ que hemos sacado como factor común. Por tanto:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} (-1)^{k+1} a_k\right| = \left| a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + a_{n+5} \ldots \begin{array}{l} -a_m, \text{ si } m-n \text{ es par} \\ \\ +a_m, \text{ si } m-n \text{ es impar} \end{array} \right|.$$

A continuación, utilizando paréntesis, agrupamos de dos en dos todos los términos de la suma:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} (-1)^{k+1} a_k\right| = \left| \overbrace{(a_{n+1} - a_{n+2})}^{\geq 0} + \overbrace{(a_{n+3} - a_{n+4})}^{\geq 0} + \overbrace{(a_{n+5}}^{\geq 0} \ldots \begin{array}{l} + \overbrace{(a_{m-1} - a_m)}^{\geq 0}, \text{ si } m-n \text{ es par} \\ \\ +a_m, \text{ si } m-n \text{ es impar} \end{array} \right|.$$

Como podemos ver, el resultado de los paréntesis es siempre una cantidad positiva pues, recordemos, por hipótesis $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente de términos positivos. Ello nos permite quitar el valor abosluto y escribir:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} (-1)^{k+1} a_k\right| = (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + (a_{n+5} \ldots \begin{array}{l} +(a_{m-1} - a_m), \text{ si } m-n \text{ es par} \\ \\ +a_m, \text{ si } m-n \text{ es impar} \end{array}$$

y, también, retirar los paréntesis

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} (-1)^{k+1} a_k\right| = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + a_{n+5} \ldots \begin{array}{l} -a_m, \text{ si } m-n \text{ es par} \\ \\ +a_m, \text{ si } m-n \text{ es impar} \end{array}.$$

El siguiente paso es volver a agrupar los términos de dos en dos usando paréntesis, pero dejando fuera al primer sumando. Entonces obtenemos:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} (-1)^{k+1} a_k\right| = a_{n+1} - \overbrace{(a_{n+2} - a_{n+3})}^{\geq 0} - \overbrace{(a_{n+4} - a_{n+5})}^{\geq 0} \ldots \begin{array}{l} -a_m, \text{ si } m-n \text{ es par} \\ \\ - \overbrace{(a_{m-1} - a_m)}^{\geq 0}, \text{ si } m-n \text{ es impar} \end{array}.$$

Nuevamente, entre paréntesis estamos obteniendo siempre números positivos por ser $\{a_n\}$ una sucesión decreciente de términos positivos. Como resultado obtendremos un número (que sabemos que es positivo) menor que a_{n+1}. Ello permite afirmar que

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} (-1)^{k+1} a_k\right| < a_{n+1}$$

Para finalizar la demostración, ya solo resta aplicar que la sucesión $\{a_n\}$ converge a 0, es decir que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ / \ |a_n - 0| = a_n < \varepsilon \text{ si } n, > N$. Como $a_{n+1} > a_n$, para ese ε también se verifica que

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} (-1)^{k+1} a_k\right| < a_{n+1} < a_n < \varepsilon$$

siendo $m > n$ y por tanto también mayor que N. Queda así demostrado que la serie alternada verifica la condición de Cauchy para la convergencia de series y, por lo tanto, es convergente.

5.5. Convergencia absoluta y condicional.

Definición 72 *Una serie $\sum a_n$ se dice absolutamente convergente si $\sum |a_n|$ converge. Se dice condicionalmente convergente si $\sum a_n$ converge pero $\sum |a_n|$ diverge.*

Teorema 78 *La convergencia absoluta de una serie implica convergencia. Esto es, si $\sum |a_n|$ es convergente, entonces $\sum a_n$ también es convergente*

Demostración: Si la serie de valores absolutos $\sum |a_n|$ es convergente, verifica la condición de Cauchy para series (teorema 73), esto es $\forall \varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{Z}$ tal que si $n > N$ entonces

$$||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}|| = |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon \qquad \forall\, p = 1, 2, 3 \ldots$$

Si ahora combinamos esta desigualdad con la desigualdad triangular obtenemos que

$$|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon \qquad \forall\, p = 1, 2, 3 \ldots$$

De esta expresión se concluye que la serie $\sum a_n$ también verifica la condición de Cauchy y por lo tanto es convergente.

Es importante tener en cuenta que el inverso de este teorema es falso, como demuestra el ejemplo de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Se trata de una serie alternada convergente por aplicación del teorema 77 que, sin embargo, no es absolutamente convergente (serie armónica).

5.6. Criterios de convergencia para series de términos positivos.

Hemos indicado anteriormente que la forma genérica de calcular la suma de una serie sería intentar encontrar una fórmula en función de n para el término general de la sucesión de sumas parciales y calcular su límite $n \to \infty$. Sin embargo, eso sólo es posible en algunos casos particulares, como los de las series telescópicas y las series geométricas. Otras series que se pueden calcular analíticamente son aquellas que se pueden relacionar con el desarrollo en serie de Taylor de funciones conocidas (seno, coseno, función exponencial...) evaluadas en puntos concretos (veremos algunos ejemplos en los problemas de este tema).

Por lo tanto, a la hora de intentar calcular la suma de una serie, lo normal es tener que utilizar algún método numérico. El más simple sería, directamente, programar las sumas finitas de la serie mediante un bucle en un ordenador, y ver si incluyendo cada vez más términos en esas sumas finitas el resultado converge a algún valor. Ello requeriría ir tanteando diferentes límites superiores de esas sumas finitas y, aunque se obtuviesen resultados parecidos, ello no querría decir que la serie es convergente: Siempre podría suceder que esas sumas finitas cambien muy ligeramente con n, de tal modo que ese aumento nos resulte inapreciable y concluyamos que la serie es convergente cuando no lo es. Por esa razón, y también para saber si nos merece la pena implementar en el ordenador un método para sumar una serie, es conveniente tener criterios que nos permitan discernir *a priori* si la serie es convergente o no.

A continuación introduciremos algunos criterios de convergencia que se aplican exclusivamente a series de términos positivos. Lógicamente, también se pueden aplicar para estudiar la convergencia absoluta de series alternadas que, como acabamos de ver, implica la convergencia de la serie original.

Teorema 79 *(criterio de comparación). Sean $\sum a_k$ y $\sum b_k$ dos series de términos positivos tales que existen dos constantes positivas, c y N, verificando $a_k < cb_k$ para todo $k \geq N$. Entonces la convergencia de $\sum b_k$ implica la de $\sum a_k$.*

Demostración: Según el teorema 72 la serie $\sum b_k$ es convergente sí y sólo sí su sucesión de sumas parciales $\{t_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k\}$ está acotada superiormente. Llamemos B a esa cota superior. Es evidente que la sucesión $\{c\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k\}$ está acotada por $c \times B$. Entonces, como a partir de un cierto N se verifica que $a_k \leq c \cdot b_k$ la sucesión de sumas parciales $\{s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ también está acotada a partir de N por $c \times B + \displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_k$. Esto sucede sí y sólo sí $\sum a_k$ es convergente. $\square$

Teorema 80 *(criterio de comparación por paso al límite). Sean* $\sum a_k$ *y* $\sum b_k$ *dos series de términos positivos tales que* $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{b_k} = 1$ *Entonces* $\sum a_k$ *converge si, y sólo si,* $\sum b_k$ *converge.*

Demostración: Dado que la sucesión $\{a_k/b_k\}$ tiende a 1 cuando $k \to \infty$, aplicando la definición de límite podemos afirmar que $\forall\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que para todo $k \geq N$ se cumple $|a_k/b_k - 1| < \varepsilon$. En particular, considerando $\varepsilon = 1/2$, a partir de ese N se cumple $1/2 < a_k/b_k < 3/2$. Si $1/2 < a_k/b_k$, entonces se verifica $b_k < 2a_k$, de modo que aplicando el criterio anterior con $c = 2$ podemos afirmar que si $\sum a_k$ converge entonces $\sum b_k$ también lo hace. Análogamente, la otra parte de la desigualdad nos dice que $a_k/b_k < 3/2$, esto es, que $a_k < 3/2 b_k$. Aplicamos nuevamente el criterio de comparación con $c = 3/2$ y deducimos que si $\sum b_k$ converge entonces $\sum a_k$ también. □

Obsérvese que este teorema 80 también se verifica si $\lim_{k\to\infty} a_k/b_k = c \neq 0$. Bastaría con redefinir la serie $\sum b_k$ como $\sum b'_k$ con $b'_k = cb_k$ y ya estaríamos en las condiciones del enunciado del teorema. Si $\lim_{k\to\infty} a_k/b_k = 0$, sólo se puede afirmar que la convergencia de $\sum b_k$ implica la convergencia de $\sum a_k$, pero no viceversa. En efecto, por ser ese límite cero podemos afirmar que $\forall\varepsilon > 0$ existe un N tal que $a_k/b_k < \varepsilon$ para todo $k > N$. Considerando en particular $\varepsilon = 1$, tendríamos que $a_k < b_k$ para todo $k > N$, y por el criterio de comparación (teorema 79) deducimos la convergencia de $\sum a_k$ si $\sum b_k$ converge. Como contraejemplo de que la implicación inversa no es cierta consideremos $a_k = 1/k^2$ y $b_k = 1/k$:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1/k^2}{1/k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k^2} = 0$$

La serie $\sum a_k$ converge (lo vemos en los ejemplos que siguen al próximo teorema), pero la $\sum b_k$ no.

Teorema 81 *(criterio de la integral). Sea f una función positiva decreciente definida para todo número real $x \geq 1$ tal que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. *Para todo $n \geq 1$ definimos la siguientes sucesiones de sumas parciales*

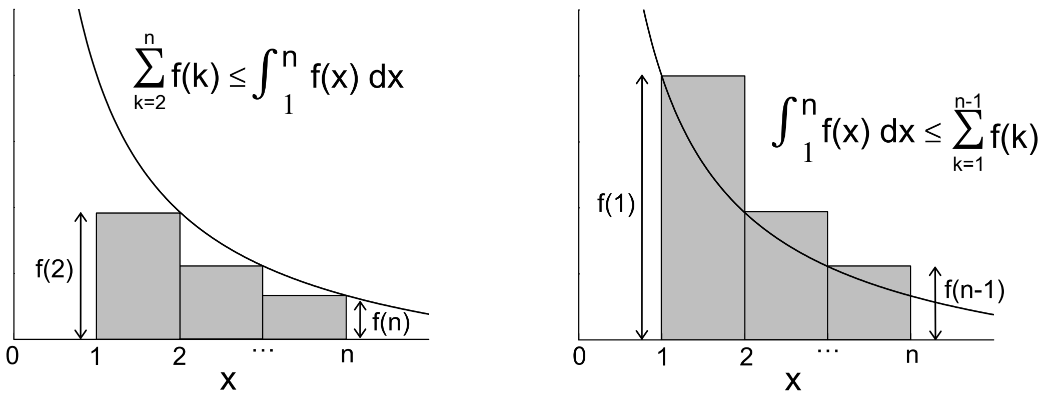
$$\{s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)\} \qquad \text{y} \qquad \{t_n = \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x\}$$

Entonces $\{s_n\}$ converge si y sólo si $\{t_n\}$ converge.
Esto nos permite estudiar la convergencia de una serie de términos positivos $\sum a_k$ sin más que aplicar este teorema identificando el término general de la serie con la función f, esto es, tomando $f(k) = a_k$. Para que la serie sea convergente tiene que, en primer lugar, cumplir la condición necesaria de la convergencia, $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = 0$. *Si esto se verifica, como $f(k) = a_k$, se verifica la hipótesis del teorema de que f es decreciente y tal que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. *Por otra parte, con la identificación $f(k) = a_k$ la sucesión $\{s_n\}$ del teorema no es otra cosa que la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum a_k$, pues* $\{s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\}$. *La serie $\sum a_k$ será convergente, por definición, si su sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ también lo es. Lo que nos dice el teorema es que $\{s_n\}$ será convergente si y solo si la sucesión $\{t_n\}$ converge y ello sucede si y solo si existe el límite:*

$$\lim_{n\to\infty} \{t_n\} = \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_1^n a_x\,\mathrm{d}x$$

En cuyo caso $\sum a_k$ será convergente.

Demostración: Como es bien conocido $\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$ no es otra cosa que el área que queda por debajo de la curva $f(x)$ entre 1 y n. Ese área se puede aproximar mediante una suma de rectángulos escalonados, tal y como se muestra en la siguiente figura.



Nótese que en ambas gráficas la base de los rectángulos siempre tiene longitud 1, de modo que su área coincide con su altura $f(k)$. Si nos queremos aproximar a la integral por debajo de la curva (gráfica izquierda) sumaríamos las áreas de los rectángulos desde $k = 2$ hasta $k = n$. Si lo hacemos por arriba (gráfica derecha) sumaríamos las áreas de los rectángulos desde $k = 1$ hasta $k = n - 1$. De esta figura se deduce, por lo tanto, lo siguiente:

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

Como $s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ y $t_n = \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$, esta desigualdad se puede escribir como $s_n - f(1) \leq t_n \leq s_{n-1}$. Las condiciones del teorema ($f(x)$ positiva) garantizan que las sucesiones $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ son monótonas crecientes, mientras que esta desigualdad lo que nos indica que o bien ambas están acotadas superiormente, o bien no lo están. Aplicando nuevamente el resultado visto en uno de los problemas del tema 3 deducimos entonces que o ambas sucesiones convergen o ambas divergen. Como $\{s_n\}$ es la sucesión de sumas parciales de $\sum a_n$, esto implica que esta serie es convergente si y sólo si $\{t_n\}$ es convergente, esto es, si existe $\lim_{n\to\infty} \{t_n\} = \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$. □

Ejemplos:

(a) Consideremos $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ con $p > 0$.

$$p \neq 1 \Longrightarrow \int_1^n \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{1}{-p+1} x^{-p+1}\right|_1^n = \frac{1}{-p+1}\left(n^{-p+1} - 1^{-p+1}\right) = \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{n^{p-1}}\right)$$

$$p = 1 \Longrightarrow \int_1^n \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \log(x)|_1^n = \log(n) - \log(1) = \log(n)$$

Observamos que sólo existe el $\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p-1}$ para $p > 1$, y concluimos que la serie mencionada sólo converge en ese caso. Nótese que para $p = 1$ tendríamos la serie armónica, que ya hemos visto que es divergente. Para $0 < p < 1$ la serie también diverge.

(b) La convergencia que acabamos de demostrar para las series $\sum 1/k^p$ con $p > 1$ es muy útil si se combina con el criterio de comparación por paso al límite (teorema 80). Según este teorema, sabemos que dos series $\sum a_k$ y $\sum b_k$ tienen las mismas características (es decir, son ambas convergentes o divergentes) si existe $\lim_{k\to\infty} a_k/b_k = c \neq 0$. Ahora bien, si tengo que estudiar la convergencia de $\sum a_k$ ¿Con qué $\sum b_k$, de la cual conozco si es convergente o divergente, la comparo? Las series del tipo $\sum 1/k^p$, ahora que sabemos cuando son convergentes y cuando no, son una buena opción.

Supongamos entonces que tenemos una serie $\sum a_k$ a la que aplicamos el teorema 80 utilizando $\sum b_k = \sum 1/k^p$ y al calcular el límite de $a_k/b_k = k^p a_k$ obtenemos que $\{k^p a_k\} \to c$, con $c \neq 0$. Sabemos que $\sum c/k^p$ es convergente para $p > 1$ y divergente para $p \leq 1$, luego aplicando ese criterio de comparación por paso al límite deducimos que $\sum a_k$ converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$. En el caso especial de que sea $c = 0$ aplicamos el criterio de comparación (teorema

79) y deducimos que si $\{k^p a_k\} \to 0$ con $p > 1$ entonces la serie $\sum a_k$ converge (nótese que ese límite implica que a partir de un cierto k los a_k tienen que ser menores que $1/k^p$ y la serie $\sum 1/k^p$ es convergente), pero en caso contrario no podemos deducir asegurar que la serie no converja, porque el teorema 79 no garantiza una doble implicación. La aplicación del criterio de comparación por paso al límite usando referencia las series en la forma $\sum b_k = \sum 1/k^p$ recibe a menudo el nombre de *criterio de Pringsheim.*

Teorema 82 *(criterio del cociente, o de D'Alembert). Sea $\sum a_k$ una serie de términos positivos tal que $\{a_{n+1}/a_n\} \to c$. Entonces si $c < 1$ la serie es convergente, y si $c > 1$ es divergente. Si $c = 1$ este criterio no decide.*

Demostración: Supongamos en primer lugar el caso $c < 1$. Como $\{a_{n+1}/a_n\} \to c$ y $c < 1$, ello implica que para cualquier x que verifique $c < x < 1$ siempre es posible encontrar un N tal que $a_{n+1}/a_n < x$ para todo $n \geq N$, es decir

$$\frac{a_{n+1}}{x} < a_n, \qquad \text{por tanto dividiendo por } x^n, \qquad \frac{a_{n+1}}{x^{n+1}} < \frac{a_n}{x^n}$$

Vemos entonces que la sucesión $\{a_n/x^n\}$ es decreciente para $n \geq N$. Por lo tanto se cumple que $a_n/x^n \leq a_N/x^N$, o lo que es lo mismo,

$$a_n \leq d\, x^n, \qquad \text{donde} \quad d = \frac{a_N}{x^N} \qquad \text{es una constante}$$

Esta es la hipótesis del criterio de comparación (teorema 79) que nos dice que $\sum a_n$ es convergente si $\sum x^n$ también lo es. Y en este caso $\sum x^n$ sí es convergente, pues es una progresión geométrica de razón $x < 1$.

Supongamos ahora que $c > 1$. De forma similar al caso anterior, como $\{a_{n+1}/a_n\} \to c$ y $c > 1$ ello implica que para cualquier x que verifique $1 < x < c$ siempre es posible encontrar un N tal que $a_{n+1}/a_n > x$ para todo $n \geq N$. Es decir, a partir de ese N se verifica que $xa_n \leq a_{n+1}$. Como $x > 1$, entonces $a_n < x\, a_n \leq a_{n+1}$. Por lo tanto, a partir de un cierto N, $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \geq N$, de modo que la sucesión $\{a_n\}$ es creciente a partir de ese N. Como además los a_n son positivos, $\{a_n\}$ no puede tender a cero, que es una condición necesaria para que $\sum a_n$ converja.

En el caso de que $c = 1$ este criterio no decide. Sirva como ejemplo que la serie armónica está en ese supuesto y no converge, mientras que la serie $\sum 1/n^2$ también está en este supuesto pero sí converge. □

Teorema 83 *(criterio de la raíz, o de Cauchy–Hadamard). Sea $\sum a_k$ una serie de términos positivos tal que $\{\sqrt[n]{a_n}\} \to c$. Entonces si $c < 1$ la serie es convergente, y si $c > 1$ es divergente. Si $c = 1$ este criterio no decide.*

Demostración: Si $\{\sqrt[n]{a_n}\} \to c$, esto por la definición de límite quiere decir que $\forall \varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{Z}^+$ para el que se verifica que $|\sqrt[n]{a_n} - c| < \varepsilon$ o, equivalentemente, que $c - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < c + \varepsilon$ si $n > N$.

Supongamos que $c < 1$. Tomando la segunda desigualdad, como ε es tan pequeño como se quiera, para cualquier x que verifique $c < x < 1$ siempre es posible encontrar un N tal que $a_n^{1/n} < x$ para todo $n \geq N$. Esto equivale a decir que $a_n \leq x^n$, ha de satisfacerse para todo $n \geq N$. Esta es, nuevamente, la hipótesis del criterio de comparación (teorema 79) que nos dice que $\sum a_n$ es convergente si $\sum x^n$ también lo es. Y en este caso $\sum x^n$ sí es convergente, pues es una progresión geométrica de razón $x < 1$.

Supongamos ahora que $c > 1$. Como $\{\sqrt[n]{a_n}\} \to c$ y $c > 1$ ello implica que para cualquier x que verifique $1 < x < c$ siempre es posible encontrar un N tal que $\sqrt[n]{a_n} > x$ para todo $n \geq N$. Elevando a n esta desigualdad encontramos que $a_n > x^n$ para todo $n \geq N$. Como $x > 1$, también $x^n > 1$ y lo que estamos diciendo en realidad es que $a_n > 1$ para todo $n \geq N$. Por lo tanto $\{a_n\}$ no puede tender a cero, condición necesaria para la convergencia.

En el caso de que $c = 1$ podemos usar los mismos ejemplos que en el teorema anterior para ilustrar que este criterio no decide. □

Teorema 84 *(criterio de Raabe–Duhamel). Sea $\sum a_k$ una serie de términos positivos y sea $\lim_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = c$. Entonces la serie converge si $c > 1$ y diverge si $c < 1$. Si $c = 1$ el criterio no decide.*

5.7. Criterios de convergencia de Dirichlet y de Abel.

Los criterios de convergencia formulados en la sección anterior, como se indica en el título de la misma, se aplican exclusivamente a series de términos positivos o, como también hemos comentado, para estudiar la *convergencia absoluta* (que según el teorema 78 implica la convergencia) de las series alternadas. No obstante, también hemos visto que una serie alternada puede ser convergente y no ser absolutamente convergente. En ese caso es necesario utilizar el criterio de Leibniz (teorema 77, que es exclusivo de las series alternadas y que nos dice que la condición necesaria para la convergencia de cualquier serie, para una serie alternada es también suficiente) o criterios de convergencia que no dependan del signo del término general de la serie y que se puedan aplicar a series positivas, alternadas o incluso a aquellas cuyos términos cambian de signo pero no alternativamente. Dos de ellos son los criterios de Dirichlet y de Abel, que se basan en la fórmula de sumación parcial de Abel que introducimos a continuación.

Teorema 85 *(fórmula de sumación parcial de Abel). Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de números reales y sea $\{A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\}$ la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum a_n$ generada por $\{a_n\}$. Entonces se verifica*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k(b_k - b_{k+1})$$

Si aplicamos $n \to \infty$ en esta expresión se obtiene que la serie $\sum a_k b_k$ converge si convergen simultáneamente la serie $\sum A_k(b_k - b_{k+1})$ y la sucesión $\{A_n b_{n+1}\}$.

Demostración: Definiendo $A_0 = 0$ tenemos $a_k = A_k - A_{k-1}$ para todo k, por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k$$

Si en el segundo sumatorio realizamos ahora el cambio de índice $k - 1 = j$ obtenemos $\sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k = \sum_{j=0}^{n-1} A_j b_{j+1}$. Ahora bien, como $A_0 = 0$ entonces $\sum_{j=0}^{n-1} A_j b_{j+1} = \sum_{j=1}^{n-1} A_j b_{j+1}$. Realizamos un nuevo cambio de índice $j = k$ y trivialmente podemos escribir $\sum_{j=1}^{n-1} A_j b_{j+1} = \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1}$. Finalmente, a esta serie le sumamos y restamos $A_n b_{n+1}$ y obtenemos $\sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} A_k b_{k+1} - A_n b_{n+1}$. La conclusión de todo este razonamiento es que $\sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_{k+1} - A_n b_{n+1}$ y, por consiguiente

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \left(\sum_{k=1}^{n} A_k b_{k+1} - A_n b_{n+1} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_k b_{k+1} + A_n b_{n+1} = A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1}).\square$$

Teorema 86 *(criterio de Dirichlet). Sea $\sum a_n$ una serie cuyas sumas parciales forman una sucesión acotada. Sea $\{b_n\}$ una sucesión decreciente que converge a cero. Entonces la serie $\sum a_n b_n$ converge.*

Demostración: Vamos a aplicar la fórmula de sumación parcial de Abel que hemos introducido en el teorema anterior, y que hemos visto nos dice que $\sum a_n b_n$ converge si convergen simultáneamente la serie $\sum A_k(b_k - b_{k+1})$ y la sucesión $\{A_n b_{n+1}\}$, en donde A_n es la suma parcial n-ésima de la serie $\sum a_n$.

Sea entonces $\{A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\}$ la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum a_n$. Como está acotada, sabemos que existe un $M > 0$ tal que $|A_n| \leq M$ para todo n. Como por hipótesis $\{b_n\}$ una sucesión decreciente que converge a cero deducimos inmediatamente que $\{A_n b_{n+1}\}$ es convergente (y además converge a cero), pues es el producto de una sucesión acotada por otra que converge a cero.

Por lo tanto, para establecer la convergencia de $\sum a_n b_n$ sólo nos queda demostrar que la serie $\sum A_k(b_k - b_{k+1})$ converge. Para ello, basta darse cuenta, en primer lugar de que $\sum (b_k - b_{k+1})$, es una serie telescópica generada por una sucesión $\{b_n\}$ que es convergente (a cero). Por lo tanto, según el teorema 75, $\sum (b_k - b_{k+1})$ es convergente. Por otra parte, $|A_k(b_k - b_{k+1})| \leq |M(b_k - b_{k+1})|$ por ser $M > |A_k|$. Además, como $\{b_n\}$ es decreciente, $(b_k - b_{k+1}) \geq 0$, de modo que podemos afirmar que

$|A_k(b_k - b_{k+1})| \le M(b_k - b_{k+1})$. Aplicando el criterio de comparación (teorema 79) deducimos que la serie $\sum A_k(b_k - b_{k+1})$ también converge (absolutamente). □

Teorema 87 *(criterio de Abel). Sea $\sum a_n$ una serie convergente y sea $\{b_n\}$ una sucesión monótona convergente. Entonces la serie $\sum a_n b_n$ converge.*

Demostración: La demostración se hace también a partir de la fórmula de sumación parcial de Abel, de modo que, utilizando la misma notación que en el teorema anterior, para demostrar que $\sum a_n b_n$ converge tenemos que demostrar que convergen simultáneamente la serie $\sum A_k(b_k - b_{k+1})$ y la sucesión $\{A_n b_{n+1}\}$.

La convergencia de $\sum a_n$ implica la convergencia de su sucesión de sumas parciales $\{A_n\}$, y por lo tanto la de la sucesión $\{A_n b_{n+1}\}$, pues por hipótesis del teorema $\{b_n\}$ es convergente.

Para demostrar que la serie $\sum A_k(b_k - b_{k+1})$ es convergente, sólo es necesario darse cuenta que al ser $\{A_n\}$ una sucesión convergente, también está acotada. El resto de la demostración es análoga a la del criterio de Dirichlet.

Ejemplo:

Consideremos la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(kx)}{k}$. El criterio de Dirichlet nos permite asegurar que converge. Para verlo, siguiendo la notación del teorema 86, identificamos la sucesión decreciente que converge a cero con $\{b_k\} = \{1/k\}$, y la serie cuyas sumas parciales forman una sucesión acotada con $\sum a_k = \sum \operatorname{sen}(kx)$. Esta serie está acotada porque[2]:

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}(kx) = \frac{1}{2\operatorname{sen}(x/2)} \sum_{k=1}^{n} 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{sen}(kx) =$$

$$= \frac{1}{2\operatorname{sen}(x/2)} \sum_{k=1}^{n} \left[\cos\left(\frac{2k-1}{2}x\right) - \cos\left(\frac{2k+1}{2}x\right)\right] = \frac{1}{2\operatorname{sen}(x/2)} \times$$

$$\times \left[\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{3x}{2}\right) + \cos\left(\frac{3x}{2}\right) - \cos\left(\frac{5x}{2}\right) + \cos\left(\frac{5x}{2}\right) - \ldots - \cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\operatorname{sen}(x/2)} \left[\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\right] = \frac{1}{2\operatorname{sen}(x/2)} \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}x\right)$$

5.8. Reordenación de series.

Es evidente que el orden de los términos en una suma finita puede alterarse sin que por ello cambie el resultado final (propiedad conmutativa). Sin embargo, en 1833 Cauchy hizo el sorprendente descubrimiento de que esto no siempre es cierto para las series (sumas infinitas). La siguiente serie armónica alternada converge a $\log(2)$, como demostraremos en un ejercicio:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(k+1)}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \log(2)$$

Si ahora reordenamos los términos de esta serie tomando alternativamente dos términos positivos, seguidos de uno negativo, obtenemos una nueva serie cuya suma es $(3/2)\log(2)$, como también demostraremos en un ejercicio:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots = \frac{3}{2}\log(2)$$

Esto, aunque sorprendente, demuestra que la reordenación de los términos de una serie convergente puede alterar su suma. Además, es relativamente sencillo de entender si se tiene en cuenta que la suma de una serie infinita es el límite de una sucesión de sumas parciales. Pensando en esto, supongamos que tenemos una baraja española, retiramos las figuras y nos quedamos sólo con las cartas de 1 a 7. La suma de los valores de *todas* las cartas no cambia si las barajamos, pero sí que pueden cambiar al barajar las sumas parciales del las tres, cinco, catorce ... primeras cartas.

A continuación enunciaremos un teorema que nos dice que la reordenación de una serie puede alterar su suma si es alternada y condicionalmente convergente. Es decir, la reordenación de los términos de una

[2]Recuérdese la identidad trigonométrica $2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$.

serie absolutamente convergente no altera su suma. Conviene, en todo caso, dar primero una definición formal de lo que se entiende por reordenación de una serie antes de enunciar dicho teorema

Definición 73 *Sea f una función biyectiva (uno a uno) con dominio y recorrido los enteros positivos, $f : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}^+$. Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series tales que $b_n = a_{f(n)}$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces se dice que $\sum b_n$ es una serie reordenada de $\sum a_n$.*

Obsérvese que $\sum a_n$ es también una serie reordenada de $\sum b_n$ porque, por ser f biyectiva, podemos escribir $a_n = b_{f^{-1}(n)}$

Teorema 88 *Sea $\sum a_n$ una serie absolutamente convergente de suma s. Entonces cada serie reordenada de $\sum a_n$ es también absolutamente convergente y su suma es también s.*

Demostración parcial: Sea $\sum b_n$ una reordenada de $\sum a_n$, es decir, $b_n = a_{f(n)}$. Como $\sum a_n$ es absolutamente convergente, sabemos que $\sum |a_n|$ converge, lo cual a su vez implica que la sucesión de sus sumas parciales está acotada. Entonces la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum |b_n|$ también lo estará y, además, como sus términos son todos positivos, esa sucesión de sumas parciales será siempre monótona creciente. Aplicando el teorema 72 deducimos que $\sum |b_n|$ converge y por lo lo tanto $\sum b_n$ converge absolutamente. Falta demostrar que $\sum b_n$ tiene la misma suma que $\sum a_n$. Aunque no es complicada no daremos la demostración aquí (véase, por ejemplo, Calculus I pág. 503, de Apostol).

Como hemos indicado en la introducción de esta sección, la hipótesis de convergencia absoluta es esencial en el teorema anterior. De hecho, Riemann descubrió que una serie de términos reales condicionalmente convergente puede reordenarse de modo que no sólo se puede alterar su suma, sino que incluso se puede encontrar una reordenación que converja hacia cualquier número real que se desee. Este sorprendente hecho es una consecuencia del siguiente teorema.

Teorema 89 *Sea $\sum a_n$ una serie condicionalmente convergente de términos reales, y sea S un número real dado. Entonces existe una reordenación $\sum b_n$ de $\sum a_n$ que converge hacia la suma S.*

Puede verse la demostración en la página 504 de Calculus I, de Apostol. La idea subyacente es que a partir de una serie condicionalmente convergente pueden construirse dos series, una de términos positivos y otra de términos negativos, ninguna de las dos convergente. Uno puede entonces hacer una reordenación tomando términos positivos y negativos de modo que se anulen parcialmente unos a otros hasta acercarse arbitrariamente a cualquier número real prefijado. Esto es posible porque tenemos a nuestra disposición una infinidad de términos positivos de suma divergente, junto con otra infinidad de términos negativos de suma también divergente.

5.9. Series parciales.

Definición 74 *Sea f una función biyectiva cuyo dominio es $\mathbb{Z}^+$ y cuyo recorrido es un subconjunto infinito de $\mathbb{Z}^+$. Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series tales que $b_n = a_{f(n)}$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces $\sum b_n$ se llama serie parcial de $\sum a_n$*

Obsérvese que la diferencia entre una serie parcial y una reordenada es que en esta última están todos lo términos de la serie original, pero en la serie parcial no, por ser el recorrido de f sólo un subconjunto de $\mathbb{Z}^+$, no todo $\mathbb{Z}^+$.

Teorema 90 *Si $\sum a_n$ converge absolutamente, cada serie parcial $\sum b_n$ también converge absolutamente, y además se cumple*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Demostración: Dado n, sea N el mayor entero del conjunto $f(1), f(2), \ldots, f(n)$, donde f es la función biyectiva que define a $\sum b_n$ como suma parcial de $\sum a_n$. Entonces se verifica

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |b_k| = \sum_{k=1}^{n} |a_{f(k)}| \leq {}^{3} \sum_{k=1}^{N} |a_k|$$

Haciendo ahora tender n a ∞ (que también implica que N tiende a ∞) tenemos demostrada la desigualdad del teorema. Además, la desigualdad $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ implica la convergencia absoluta de $\sum b_n$, sin más que aplicar el criterio de comparación teniendo en cuenta que, por hipótesis, $\sum a_n$ converge absolutamente.

5.10. Serie de Taylor generada por una función.

La fórmula de Taylor (teorema 67) permite construir series que proporcionan el valor de una función en un punto. Dicho teorema nos dice que si f es derivable hasta orden n en c, entonces se verifica para todo x del dominio de la función que:

$$f(x) = f(c) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x-c)^n$$

Siendo x_1 un punto interior del intervalo abierto que une x con c (es decir, del intervalo (x, c) o del (c, x), dependiendo de que x sea menor o mayor que c, respectivamente). Si denotamos por

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k \quad \text{y} \quad R_n = \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x-c)^n, \qquad f^{(0)}(c) = f(c)$$

podemos escribir $f(x) = S_n + R_n$, e interpretar la cantidad R_n (resto) como la diferencia entre la suma parcial n-ésima, S_n, y el valor de la función, $f(x)$. La suma finita S_n es el polinomio de Taylor de grado $n-1$ generado por f en c. Si exigimos que la función f sea infinitamente derivable, es decir, que tenga derivadas de todos los órdenes, podemos hacer tender n a infinito en la expresión de S_n y obtenemos la denominada serie de Taylor generada por la función f en el punto c:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

Es importante resaltar que, en general, la serie de Taylor de una función no siempre converge y, cuando lo hace, puede que no converja necesariamente al valor de la función $f(x)$. De hecho, La expresión $f(x) = S_n + R_n$ nos dice que S_n convergerá a $f(x)$ si y sólo si el término de resto o error, R_n, tiende a cero cuando n tiene a infinito. El siguiente teorema da una condición suficiente para la convergencia de una serie de Taylor.

Teorema 91 *Si f es infinitamente derivable en un intervalo abierto $I = (c-r, c+r)$, y si existe una constante positiva A tal que*

$$|f^{(n)}(x)| \leq A^n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+, \quad \forall x \in I$$

entonces la serie de Taylor generada por f en c converge hacia $f(x)$ para cada $x \in I$.

Demostración: Para todo $x_1 \in I$ tenemos

$$0 \leq |R_n(x)| = \frac{|f^{(n)}(x_1)|}{n!}|x-c|^n \leq \frac{A^n}{n!}|x-c|^n = \frac{B^n}{n!}$$

donde $B^n = A^n|x-c|^n$. Ahora bien, para todo B el cociente $B^n/n!$ tiende a cero cuando $n \to \infty$ ($n!$ crece más rápido que cualquier constante elevada a n, como se ha visto en los ejercicios del Tema 3), por lo tanto R_n tiende a cero y el teorema queda probado. □

Ejemplos:

[3] Para entender esta desigualdad, supongamos que la suma parcial de $|b_k|$ fuese de índice 3, $\sum_{k=1}^{3} |b_k| = |b_1| + |b_2| + |b_3| = |a_{f(1)}| + |a_{f(2)}| + |a_{f(3)}|$. Imaginemos que $f(1) = 3$, $f(2) = 8$, $f(3) = 5$. Tendríamos $N = 8$. Es evidente que $\sum_{k=1}^{3} |b_k| = |a_3| + |a_8| + |a_5|$ es menor o igual que $\sum_{k=1}^{8} |a_k|$

(a) Tomemos $f(x) = e^x$ y $c = 0$. Es infinitamente derivable, $f^{(n)}(x) = e^x$. Entonces,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}x^k \quad \text{y} \quad R_n = \frac{e^{x_1}}{n!}x^n, \;\; x_1 \in (-|x|, |x|)$$

Para cualquier $x \in \mathbb{R}$ se verifica $\lim_{n\to\infty} x^n/n! = 0$, por lo tanto $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ para todo x y podemos escribir

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$$

Este resultado es útil para calcular analíticamente series numéricas que podamos relacionar con esta serie. Como ejemplos sencillos, es evidente que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$ tomando $x = 1$, o que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e}$ tomado $x = -1$. En el boletín veremos más ejemplos de series que se pueden evaluar relacionándolas con la serie de Taylor de esta función o de otras funciones conocidas.

(b) Veamos ahora el caso de una función que no tiene desarrollo de Taylor válido en todo $\mathbb{R}$. Sea $f(x) = \log(x)$ y tomemos $c = 1$.

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \qquad f^{(2)}(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}, \qquad f^{(4)}(x) = (-1)^3\frac{3!}{x^4},$$

La k-ésima derivada es $\quad f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{x^k}, \quad$ por lo tanto

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k$$

(empezamos en $k = 1$ porque $f^{(0)}(1) = f(1) = \log(1) = 0$). El resto n-ésimo es

$$R_n = \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x-c)^n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}\frac{(x-1)^n}{x_1^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{(x-1)^n}{x_1^n}$$

estando x_1 en el intervalo $(1, x)$ si $x > 1$ o en el $(x, 1)$ si $x < 1$. Haciendo el cambio de variable $y = (x-1)/x_1$, escribimos

$$R_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{(x-1)^n}{x_1^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}y^n$$

Calculamos ahora $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n| = \lim\limits_{n\to\infty} |y|^n/n$. Está claro que si $|y| \leq 1$ el límite es cero. Si $|y| \geq 1$ tendríamos una indeterminación infinito partido por infinito, pero aplicando la regla de L'Hopital obtenemos $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n| = \lim\limits_{n\to\infty} (|y|^n)' = \lim\limits_{n\to\infty} |y|^n \log|y|$, por lo que el límite daría infinito. La conclusión es que será $\lim_{n\to\infty} |R_n| = 0$ si, y sólo si, $|y| \leq 1$. Como $y = (x-1)/x_1$, eso quiere decir que $|x-1|/|x_1| \leq 1$.

Si $x > 1$, tenemos que $x - 1 > 0$. Además, $x_1 \in (1, x)$, de modo que $x_1 > 1$. Por lo tanto $|x-1|/|x_1| \leq 1 \iff (x-1)/x_1 \leq 1$. Ello quiere decir que $(x-1) < x_1$. Como $x_1 \in (1, x)$ y podría estar tan próximo a 1 como podamos imaginar, para garantizar esta condición x tendría que verificar necesariamente que $x - 1 < 1$, esto es, $x < 2$.

Si $x < 1$, tenemos que $x-1 < 0$. Por lo tanto se verificará que $|x-1|/|x_1| < 1 \iff (1-x)/|x_1| < 1$. Ello quiere decir que $(1-x) < |x_1|$, o lo que es lo mismo, $-x_1 < (1-x) < x_1$. Tomando la segunda desigualdad y teniendo en cuenta que $x_1 \in (x, 1)$ y que por lo tanto x_1 podría estar infinitamente próximo a 1, para asegurarnos de que x cumple esa desigualdad tiene que darse necesariamente $1 - x < 1$. Entonces $-x < 0$ o, equivalentemente, $x > 0$.

Deducimos entonces que si $x \in (0, 2)$ el resto tiende a cero y la serie de Taylor converge a la propia función que la genera. Nos falta estudiar los puntos $x = 0$ y $x = 2$. Si ponemos $x = 0$, la suma parcial n-ésima de la serie de Taylor se convierte en $S_n = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$, que evidentemente al aplicar el límite $n \to \infty$ se convierte en la serie armónica y no converge (como es lógico, pues como sabemos no existe el logaritmo de cero). Si ponemos $x = 2$, tendremos $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, que al aplicar el límite $n \to \infty$ sabemos que es convergente, pues es una serie alternada con término general decreciente que tiende a cero (criterio de Leibniz). En uno de los ejercicios propuestos en el boletín, se demostrará que, además, converge al logaritmo de 2. La serie de Taylor de $\log(x)$ converge, por tanto, para todo $x \in (0, 2]$.

(c) Sea $f(x) = e^{1/x}$ en $[a, b] = [-1, 0]$ y $c = 0$. Nótese que por la izquierda de 0 esta función es continua si la definimos en 0 de forma apropiada y además admite derivadas laterales de cualquier orden.

En efecto, tomando $f(0) = 0$ garantizamos la continuidad de la función en 0, pues tenemos $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} \longrightarrow e^{-\infty} = 0$.

Además, también es derivable en $x = 0$, y esa derivada es continua si definimos $f'(0) = 0$. Para verlo, basta con calcular la derivada, que es $f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{1/x}$ y calcular su límite cuando $x \to 0^-$ del siguiente modo

$$\lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{x^2}e^{1/x} = \lim_{y\to -\infty} -y^2 e^y = \lim_{y\to\infty} y^2 e^{-y} = \lim_{y\to\infty} \frac{y^2}{e^y} = 0$$

El último límite se calcula muy fácilmente aplicando la regla de L'Hopital dos veces. Se puede comprobar fácilmente que este límite también es 0 para cualquier derivada de orden n (el límite se calcula de forma análoga, aplicando L'Hopital $n + 1$ veces), que podremos hacer continua sin más que definir $f^{(n)}(0) = 0$. Esto implica que al calcular $f(x)$ usando la fórmula de Taylor alrededor de $c = 0$ tendremos

$$f(x) = S_n + R_n, \qquad \text{con} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k = 0, \qquad \text{y} \quad R_n = \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}x^n$$

Esto significa que el resto se lleva todo el valor de la función y que, por lo tanto, no es posible construir una serie de Taylor que coincida con la función entorno a $c = 0$. Otro ejemplo de desarrollo en serie de Taylor en $c = 0$ en el que todo el valor de la función se lo lleva el resto sería $f(x) = e^{-1/x^2}$ en $[a, b] = [-1, 1]$.

5.11. Sucesiones de funciones.

En la siguiente sección estudiaremos series cuyos términos no son números, sino funciones reales de variable real, esto es, series del tipo $\sum f_n(x)$. Sin embargo, tal y como hemos visto para las series numéricas, el estudio de una serie está directamente relacionado con el de su sucesión de sumas parciales. Por lo tanto, antes de abordar el estudio de las series funcionales $\sum f_n(x)$, es necesario conocer las propiedades de las sucesiones de funciones $\{f_n(x)\}$. Los términos de estas sucesiones no son otra cosa que los valores numéricos que las funciones f_n toman cuando se evalúan en el punto x. Por lo tanto sus propiedades están relacionadas con las propiedades de las sucesiones numéricas que hemos visto en el Tema 3.

Definición 75 *(Función límite de una sucesión de funciones) Sea $\{f_n\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, una sucesión de funciones reales con el mismo dominio. Sea S el conjunto formado por los $x \in \mathbb{R}$ tales que la sucesión $\{f_n(x)\}$ es convergente. A la función definida por*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad \text{si } x \in S$$

se le llama límite de la sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$. Se dice, además, que tal sucesión converge puntualmente a f en el conjunto S.

Una cuestión fundamental que se debe de tener en cuenta es que las propiedades de las funciones que forman la sucesión $\{f_n(x)\}$ no siempre se trasladan a su función límite. Es decir, el la función límite de una sucesión de funciones continuas, derivables o integrables, no es necesariamente una función continua, derivable o integrable. Y en el caso de que la función límite $\{f(x)\}$ sea derivable o integrable, su derivada o integral no coincide necesariamente con el límite de las derivadas o integrales de la sucesión $\{f_n(x)\}$. En resumen, lo que estamos diciendo es que el límite $n \to \infty$ que se aplica a $\{f_n(x)\}$ para calcular su función límite $f(x)$ *no siempre conmuta* con la derivación, con la integración o con el límite $x \to c$ que se realiza para estudiar la continuidad en un punto c. Esto es, *en general*

$$\lim_{x\to c} f(x) := \lim_{x\to c}[\lim_{n\to\infty} f_n(x)] \neq \lim_{n\to\infty}[\lim_{x\to c} f_n(x)] = \lim_{n\to\infty} f_n(c)$$

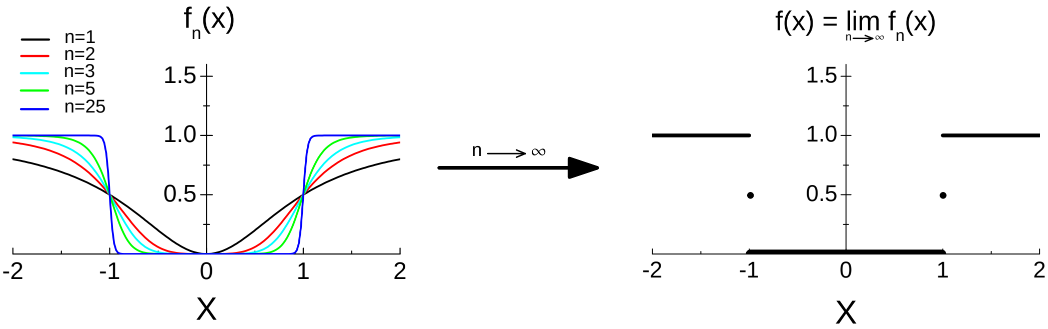
$$f'(x) := [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]' \neq \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$$

$$\int f(x)\mathrm{d}x := \int [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]\mathrm{d}x \neq \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\mathrm{d}x$$

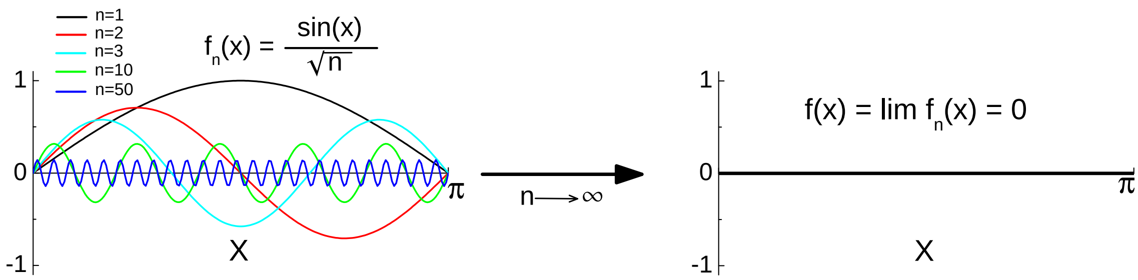
Este hecho se puede ilustrar mediante algunos ejemplos:

(a) La siguiente es una sucesión de funciones continuas cuyo límite es una función discontinua en $x = \pm 1$.

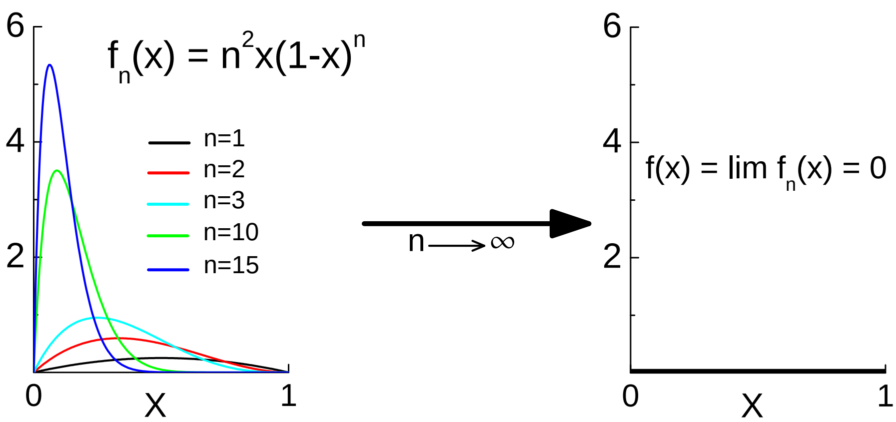
$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} = \frac{1}{1+\frac{1}{x^{2n}}}, \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < 1, \\ 1/2 & \text{si } |x| = 1, \\ 1 & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$



(b) $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{sen}(nx)}{\sqrt{n}}$ es una sucesión de funciones derivables. Su función límite, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \ \forall x$, es trivialmente derivable y su derivada es cero. Sin embargo, la sucesión de derivadas, $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos(nx)$, no tiene función límite pues $\lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ es divergente salvo cuando $x = (2k+1)\pi/2$ (donde se anula el coseno).



(c) $f_n(x) = n^2x(1-x)^n$, en $x \in [0,1]$ es una sucesión de funciones integrables en ese intervalo. Su función límite en $[0,1]$ es $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ (pasar $(1-x)^n$ al denominador cambiando el signo de la potencia en n y aplicar L'Hopital).



Como consecuencia tenemos que

$$\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = 0$$

Sin embargo,

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = n^2 \int_0^1 x(1-x)^n\,dx = n^2 \int_0^1 (1-t)t^n\,dt = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}$$

con lo cual

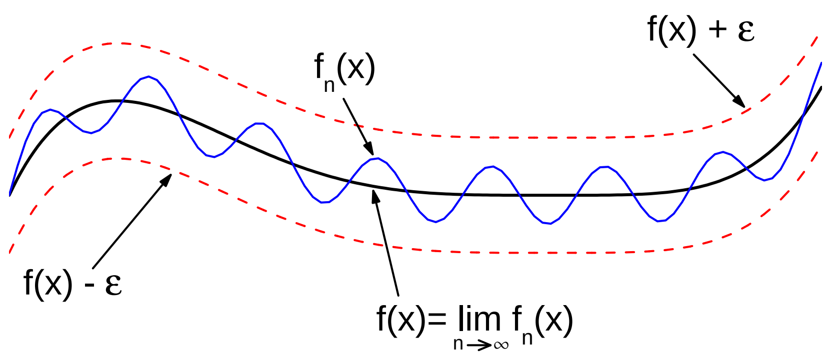
$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 f_n(x)\,dx \right) = 1$$

Por lo tanto, el límite de las integrales no es igual a la integral de la función límite.

Entonces, ¿en que condiciones se puede conmutar el límite $n \to \infty$ de una sucesión de funciones con la derivada, la integral o el límite $x \to c$ que utilizamos para estudiar la continuidad en el punto c?. Esta es una pregunta que se presenta con frecuencia dentro del análisis matemático. Para responderla, definiremos a continuación el concepto de convergencia uniforme que, como veremos, es una condición suficiente (pero no necesaria) para que la continuidad e integrabilidad de una sucesión de funciones se traslade a su límite. También veremos que la convergencia uniforme tiene relación con el hecho de que la derivabilidad de una sucesión de funciones se traslade a su límite, aunque de un modo menos directo.

Definición 76 *Se dice que una sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en un conjunto S si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{Z}^+$ (que depende sólo de ε) tal que si $n > N$ entonces $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todos y cada uno de los x de S.*

La desigualdad $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ es equivalente a $f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$, lo cual quiere decir que, para todo $x \in S$, la gráfica de todas las f_n con $n > N$ está contenida en una banda bidimensional de altura 2ε situada simétricamente en torno a la gráfica de f, tal y como muestra la siguiente figura.



Observación: A partir de las gráficas de los tres ejemplos de sucesiones de funciones que hemos visto, podemos deducir intuitivamente que la única que verifica esta condición es la del ejemplo (b). El siguiente teorema formaliza esta idea intuitiva y establece una condición necesaria y suficiente para que una sucesión de funciones sea uniformemente convergente.

Teorema 92 *(condición de Cauchy para la convergencia uniforme de sucesiones de funciones) Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en un conjunto S. Existe una función f tal que $\{f_n\} \longrightarrow f$ uniformemente en S si, y sólo si, se satisface la siguiente condición : Para todo $\varepsilon > 0$ existe un N tal que si $n, m > N$ entonces $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, para todos los $x \in S$.*

En otras palabras, lo que dice este teorema es que una sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge uniformemente a una función límite f en el conjunto S si, y sólo si (condición necesaria y suficiente), todas las *sucesiones numéricas* que se obtendrían al evaluar las funciones de $\{f_n\}$ en cada uno de los puntos $x \in S$ verifican la condición de Cauchy para sucesiones numéricas con una particularidad: una vez dado el $\varepsilon > 0$ *el N tiene que ser el mismo para todos los $x \in S$*. La demostración de este teorema está basada en esa idea y puede consultarse en la página 270 del libro *Análisis Matemático* de T. Apostol

Teorema 93 *(Relación entre convergencia uniforme de una sucesión de funciones y continuidad) Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones que converge uniformemente a f en S. Si cada f_n es continua en un punto $c \in S$, entonces la función límite también es continua en c.*

Observación: en el caso de que c sea un punto de acumulación de S, y por lo tanto se pueda hacer el límite $x \to c$ donde $x \in S$, este teorema implica que

$$f(c) = \lim_{x\to c} f(x) := \lim_{x\to c}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to c} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} f_n(c)$$

No obstante, la convergencia uniforme de $\{f_n\}$ es suficiente, pero no necesaria, para garantizar que la continuidad de cada f_n implica la continuidad de la función límite f. Este es el caso de la sucesión de funciones del ejemplo (c) que hemos presentado anteriormente: $f_n(x) = n^2x(1-x)^n$, con $0 \leq x \leq 1$, es una sucesión de funciones continuas convergente, pero no uniformemente convergente. Sin embargo, su límite $f(x) = 0$ también es una función continua.

Teorema 94 *(Relación entre convergencia uniforme de una sucesión de funciones e integración) Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones reales definidas en el intervalo compacto $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Si la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[a,b]$ hacia su función límite f, y las funciones f_n que la forman son integrables en $[a,b]$, entonces la función límite f también es integrable en $[a,b]$ y su integral $\int_a^x f$ es el límite de la sucesión de integrales $\{\int_a^x f_n\}$ para todo $x \in [a,b]$, es decir:*

$$\int_a^x f(t)dt \;:=\; \int_a^x \left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right) dt \;=\; \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^x f_n(t)\,dt\right)$$

Por lo tanto, este teorema establece que la convergencia uniforme de $\{f_n\}$ es una condición suficiente para que la integración conmute con el límite $n \to \infty$ de la sucesión, de modo que la integral de la función límite f coincidirá con el límite $n \to \infty$ de las integrales de los términos de la sucesión.

Sin embargo, al igual que en el teorema anterior, esta condición es suficiente pero no necesaria. El siguiente ejemplo lo pone de manifiesto

> Sea $f_n(x) = x^n$ para $x \in [0,1]$. La función límite $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ tiene valor 0 para $x \in [0,1)$, y $f(1) = 1$. Dado que la sucesión $\{f_n\}$ está formada por funciones continuas y la función límite no lo es, la convergencia no es uniforme en $[0,1]$. A pesar de ello, la integral de la función límite si coincide con el límite cuando $n \to \infty$ de las integrales de los términos de la sucesión:
>
> $$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 f_n(x)\,dx\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 x^n\,dx\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$
>
> $$\int_0^1\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = 0\cdot\int_0^1 dx = 0$$

A continuación enunciaremos el teorema que establece en que condiciones es posible intercambiar la derivada con el límite de una sucesión de funciones. Podemos anticipar ya que, a diferencia de lo que ocurre con la continuidad y la integración, la convergencia uniforme no es suficiente: La sucesión de funciones del ejemplo (b), dada por $f_n(x) = \operatorname{sen}(nx)/\sqrt{n}$, converge uniformemente a $f(x) = 0$. Sin embargo, la sucesión de derivadas, dada por $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos(nx)$, no converge ni siquiera puntualmente. Por ejemplo, $\{f_n'(0)\}$ diverge porque $f_n'(0) = \sqrt{n}$.

Teorema 95 *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones reales en la que cada uno de sus términos tiene derivada finita en todos los puntos de un intervalo abierto (a,b). Supongamos que por lo menos en un punto $x_0 \in (a,b)$ la sucesión $\{f_n(x_0)\}$ converge. Supongamos además que existe una función $g(x)$ tal que $\{f_n'\} \longrightarrow g$ uniformemente en (a,b). Entonces,*

(a) Existe una función f tal que $f_n \longrightarrow f$ uniformemente en (a,b).

(b) Para cada $x \in (a,b)$ la derivada $f'(x)$ existe y es igual a $g(x)$.

Lo que dice este teorema, por lo tanto, es que si una sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente en al menos un punto de su dominio y su sucesión de derivadas es uniformemente convergente, entonces se puede asegurar que ella misma es converge uniformemente a una función f y que se cumple:

$$f'(x) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)\right)$$

Nótese que la sucesión antes mencionada, $f_n = \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{\sqrt{n}}$, no cumple esas condiciones, pues tal y como hemos indicado la sucesión de derivadas es divergente.

5.12. Series funcionales.

Una vez que conocemos las propiedades de las sucesiones de funciones podemos estudiar las de las series funcionales, esto es, las de las series en la forma $\sum f_n(x)$. Análogamente al caso de las sucesiones de funciones, donde en la sección anterior hemos establecido las condiciones que deben cumplirse para que las propiedades de las funciones de la sucesión (continuidad, integrabilidad, derivabilidad...) se trasladen a la función límite y podamos conmutar límites, integrales y derivadas con el límite cuando $n \to \infty$, en esta sección la pregunta que intentaremos contestar es cuando las propiedades de las funciones que forman una serie funcional $\sum f_n(x)$ se trasladan a la función suma y podemos intercambiar límites, integrales y derivadas con el sumatorio.

La base de la respuesta a esa pregunta es el hecho de que, como venimos aplicando a lo largo de todo el tema, la suma de una serie infinita es por definición el límite $n \to \infty$ de la sucesión de sumas parciales. Es decir, llamando $s_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$. Por otra parte, si las $f_n(x)$ son continuas, derivables o integrables, las funciones $s_n(x)$ también lo son, pues son una suma (finita) de funciones continuas, derivables o integrables. Por lo tanto, la función suma de una serie de funciones conservará las cáracterísticas de las funciones que forman esa serie, y podremos intercambiar límites, derivadas e integrales con $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}$, siempre y cuando la sucesión de sumas parciales verifique las condiciones necesarias para intercambiar límites, derivadas e integrales con el $\displaystyle\lim_{n\to\infty}$ (Teoremas 93, 94, 95).

Definición 77 *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en un conjunto S. Para cada $x \in S$ consideremos la suma parcial definida por,*

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

Si existe una función f tal que $\{s_n\} \longrightarrow f$ uniformemente en S, se dice que la serie $\sum f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ en S y se escribe como

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x) \ \ (\textit{uniformemente en } S)$$

Teorema 96 *(condición de Cauchy para la convergencia uniforme de series). La serie infinita $\sum f_n(x)$ converge uniformemente en S si, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe un N tal que $n > N$ implica*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon, \qquad \textit{para } \ p = 1, 2, 3, \ldots, \ \textit{ y cada } x \in S$$

Demostración: La demostración es inmediata teniendo en cuenta que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) = s_{n+p}(x) - s_n(x)$. Por lo tanto, lo que nos dice este teorema es que si una serie es uniformemente convergente, $\forall\varepsilon > 0$ existe un N a partir del cual, si $n > N$, $|s_{n+p}(x) - s_n(x)| < \varepsilon$ para cada $x \in S$ y para todo $p \in \mathbb{Z}^+$. Llamando $n + p = m$, esto es equivalente a decir que $\forall\varepsilon > 0$ existe un N a partir del cual, si $n, m > N$, $|s_m(x) - s_n(x)| < \varepsilon$ para cada $x \in S$. Por lo tanto, la sucesión funcional de sumas parciales verifica la condición de Cauchy de sucesiones funcionales (teorema 92) y converge uniformemente. Aplicando la definición anterior, la $\sum f_n(x)$ converge uniformemente, pues su sucesión de sumas parciales también lo hace.

Teorema 97 *(criterio mayorante de Weierstrass). Sea $\{M_n\}$ una sucesión de números no negativos tal que $0 \leq |f_n(x)| \leq M_n$ para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$ y todo x de S. Entonces $\sum f_n(x)$ converge uniformemente en S si $\sum M_n$ converge.*

<u>*Demostración*</u>: Puede verse de forma detallada y formal en la página 270 del libro *Análisis Matemático* de T. Apostol. En todo caso, de forma intuitiva, si $|f_n(x)| \leq M_n$ para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$ y todo x de S, esto quiere decir que las series numéricas que obtendríamos evaluando $\sum |f_n(x)|$ en cada x de S verificarían las condiciones del criterio de comparación (Teorema 79), tomando como serie de referencia para esa comparación $\sum M_n$. Por lo tanto si $\sum M_n$ converge, $\sum f_n(x)$ también converge (absolutamente) para cada uno de los x de S. Faltaría por demostrar que esa convergencia es, además, uniforme.

<u>*Ejemplo:*</u>

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^k}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ si $k > 1$, porque se cumple que $\left|\dfrac{\cos(nx)}{n^k}\right| \leq \dfrac{1}{n^k}$, y $\dfrac{1}{n^k}$ es convergente para $k > 1$.

<u>Teorema</u> 98 *(Series funcionales y continuidad) Supongamos que $\sum f_n(x) = f(x)$ (uniformemente en S). Si cada f_n es continua en un punto c de S, entonces f también es continua en c.*

<u>*Demostración*</u>: Si $\sum f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$, por definición es lo mismo que decir que la sucesión de sus sumas parciales $\{s_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\}$ converge uniformemente a $f(x)$. Además de eso, todas las $s_n(x)$ son continuas en c, pues son sumas (finitas) de funciones continuas en ese punto. Aplicando el teorema 93 se concluye que entonces $f(x)$ también es continua en c. Al igual que en el teorema 93, la convergencia uniforme es condición suficiente, pero no necesaria.

Además si c es un punto de acumulación de S, de modo que podemos hacer el $\lim\limits_{x\to c}$, este teorema nos permite intercambiar el paso al límite con la suma infinita, pues utilizando nuevamente el teorema 93 podemos intercambiar ese límite con el límite $n \to \infty$ de la sucesión de sumas parciales:

$$f(c) = \lim_{x\to c}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) := \lim_{x\to c}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to c} f_k(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$$

<u>Teorema</u> 99 *(Series funcionales e integración) Sea $\{f_n(x)\}$ una sucesión de funciones reales definidas en el intervalo compacto $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Si la serie de funciones $\sum f_n(x)$ converge uniformemente en $[a, b]$ hacia su función suma $f(x)$, y si las funciones f_n son integrables en $[a, b]$, entonces $f(x)$ es también integrable en $[a, b]$ y su integral es la suma de la serie de integrales, esto es:*

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\right) dt \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^x f_n(t)\, dt\right)$$

donde $x \in [a, b]$.

<u>*Demostración*</u>: Análoga a la del teorema anterior. Si $\sum f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$, por definición es lo mismo que decir que la sucesión de sus sumas parciales $\{s_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\}$ converge uniformemente a $f(x)$. Además de eso, todas las $s_n(x)$ son integrables en $[a, b]$, pues son sumas (finitas) de funciones integrables en ese intervalo. Aplicando el teorema 94 se concluye que entonces $f(x)$ también es integrable en $[a, b]$. Al igual que en el teorema 94, la convergencia uniforme es condición suficiente, pero no necesaria.

Además, este teorema nos permite intercambiar la integral con la suma infinita, pues utilizando nuevamente el teorema 94 podemos intercambiar la integral con el límite $n \to \infty$ de la sucesión de sumas parciales:

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\right) dt \;:=\; \int_a^x \left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f_k(t)\right) dt = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_a^x f_k(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x f_n(t)\, dt$$

Teorema 100 *(Series funcionales y derivación) Sea $\{f_n(x)\}$ una sucesión de funciones reales definidas en el intervalo $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Supongamos que para cada f_n existe la derivada $f_n'(x)$ para todo $x \in (a,b)$, y que para por lo menos un punto $x_0 \in (a,b)$ la serie $\sum f_n(x_0)$ converge. Si además que existe una función $g(x)$ tal que $\sum f_n'(x)$ converge a $g(x)$ uniformemente en (a,b). Entonces:*

(a) Existe una función f tal que $\sum f_n(x) = f(x)$ uniformemente en (a,b).

(b) Para cada $x \in (a,b)$ la derivada $f'(x)$ existe y es igual a $g(x) = \sum f_n'(x)$.

Demostración: Sea $\{s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\}$ la sucesión de sumas parciales de $\sum f_n(x)$. Si hay un punto $x_0 \in (a,b)$ donde la serie $\sum f_n(x_0)$ converge, eso quiere decir por definición que la sucesión de sumas parciales en ese punto, $\{s_n(x_0)\}$, también converge. Por otra parte, como las sumas parciales son sumas finitas, $s_n'(x) := \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x)$, de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} f_k'(x) = \lim_{n\to\infty} s_n'(x)$. Como consecuencia, dado que existe una función $g(x)$ a la que $\sum f_n'(x)$ converge uniformemente, la sucesión $\{s_n'(x)\}$ también converge uniformemente a $g(x)$.

Vemos entonces que la sucesión de sumas parciales $\{s_n(x)\}$ verifica todas las hipótesis del teorema 95 y, por lo tanto, podemos afirmar que:

(a) Existe una función $f(x)$ tal que $\lim_{n\to\infty} s_n(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ uniformemente en (a,b).

(b) Para cada $x \in (a,b)$ la derivada $f'(x)$ existe y es igual a $g(x) = \lim_{n\to\infty} s_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$. Esto además quiere decir que

$$f'(x) := \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

5.13. Series de potencias. Radio de convergencia.

En esta última sección estudiaremos las carácterísticas de un caso particular de series funcionales: Las series de potencias. Entre este tipo de series se encuentra el desarrollo en serie de Taylor

Definición 78 *Una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, donde $x, x_0, a_n \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, se denomina serie de potencias en $(x-x_0)$. A cada serie de potencias se le asocia un intervalo, denominado* intervalo de convergencia*, tal que la serie converge absolutamente en todo punto del intervalo y diverge en todo punto exterior al mismo. El centro del intervalo es x_0 y su radio, denominado radio de convergencia, se denota usualmente por r.*

Teorema 101 *Cuando los siguientes límites existen, el radio de convergencia de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ viene dado por*

$$r^{-1} = \lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \qquad\qquad r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Nótese que según el resultado de esos límites, el radio de convergencia puede tomar cualquier valor entre $r = 0$ y $r = +\infty$. Además, el teorema combinado con la definición anterior nos dice que la serie converge absolutamente si $|x-x_0| < r$ [esto es, en el intervalo $(x_0 - r, x_0 + r)$] y diverge si $|x-x_0| > r$. Esto se verá muy claramente a partir de la demostración.

Demostración La primera fórmula se demuestra sin más que aplicar el criterio de la raíz (teorema 83) a la serie de los valores absolutos de la serie de potencias, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n|$ (recordar que este criterio se aplica exclusivamente a series de términos positivos), de modo que lo que se estudia es la *convergencia absoluta* de la serie de potencias. Calculamos entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,|x-x_0|$$

Según el criterio de la raíz, la serie es convergente si ese límite es menor que 1, esto es:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,|x-x_0| \ < \ 1 \implies |x-x_0| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lambda^{-1} = r$$

Tendremos entonces convergencia si $|x-x_0| < r$. El criterio de la raíz también nos dice que la serie será divergente si el límite es mayor que 1:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,|x-x_0| \ > \ 1 \implies |x-x_0| > \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lambda^{-1} = r$$

Por lo tanto la serie es divergente si $|x-x_0| > r$. Por último, si el límite es igual a 1, lo que equivale a decir que $|x-x_0| = r$ (pues en ese caso se tiene que $|x-x_0| = 1/\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda^{-1} = r$), el criterio no decide. Eso quiere decir que la convergencia en los extremos del intervalo de convergencia, $x_0 - r$ y $x_0 + r$, hay que estudiarla de forma individualizada (sustituir esos puntos en la serie y estudiar la convergencia de la serie numérica resultante).

La segunda de las fórmulas del teorema se demuestra análogamente, pero aplicando el criterio del cociente (teorema 82) a la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n|$. Por lo tanto, tenemos que calcular el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x-x_0|$$

Análogamente al criterio de la raíz, el criterio del cociente nos dice que si ese límite es menor que 1 la serie converge, si es mayor que 1 diverge y si es igual a 1 no decide. Es decir

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x-x_0| \ < 1 \implies |x-x_0| < \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = r \ \text{ y la serie converge}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x-x_0| \ > 1 \implies |x-x_0| > \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = r \ \text{ y la serie diverge}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x-x_0| \ = 1 \implies |x-x_0| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = r \ \text{ no decide}$$

Al igual que al aplicar el criterio de la raíz, en este último caso habrá que estudiar los extremos del intervalo de forma individual.

Ejemplos:

(a) Consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$. Es una serie centrada en $x_0 = 0$, y con $a_n = 1$. El cálculo de su radio de convergencia usando el criterio del cociente da $r = \lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}| = \lim_{n\to\infty} 1/1 = 1$. Deducimos entonces que converge en $(x_0 - 1, x_0 + 1) = (-1, 1)$. En $x = \pm 1$, la serie se convierte en $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n$ y, respectivamente, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, no convergiendo en ninguno de los dos casos. Por lo tanto la serie converge únicamente en $(-1, 1)$.

(b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ está centrada en cero, y $a_n = 1/n^2$. Usando el criterio del cociente deducimos que su radio de convergencia es también $r = 1$, pues $r = \lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}| = \lim_{n\to\infty} (n+1)^2/n^2 = 1$. Sin embargo, a diferencia de la anterior, esta serie sí converge en los puntos $x = \pm 1$ pues en ellos se transforma en $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ y, respectivamente, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, siendo ambas series convergentes. Por lo tanto la serie converge en $[-1, 1]$.

Continuidad derivación e integración de series de potencias.

Teorema 102 *Sea $\sum a_n(x-x_0)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $r > 0$. Para todo x perteneciente al intervalo de convergencia llamemos $f(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$ a la suma de la serie. Se verifica entonces lo siguiente (siempre referido a los puntos x del intervalo de convergencia):*

(a) $f(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$ es continua.

(b) $f(x)$ es derivable y su derivada es $f'(x) = \sum n a_n(x-x_0)^{n-1}$, lo cual se expresa diciendo que la serie de potencias se puede derivar término a término:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(a_n(x-x_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}$$

(c) $f(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$ es integrable término a término y se cumple:

$$\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-x_0)^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{x_0}^{x} a_n(t-x_0)^n\, dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

(d) $f(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$ es una función infinitamente derivable (se dice de clase infinito, $\mathcal{C}^\infty$).

Demostración: Los apartados (a) y (c) se demuestran automáticamente mediante los teoremas 98 y 99 sobre la continuidad e integrabilidad de series funcionales si conseguimos demostrar que una serie de potencias siempre converge uniformemente dentro del radio de convergencia. Para ello podemos utilizar el criterio mayorante de Weierstrass (teorema 97) que, esencialmente, nos dice que una serie funcional converge uniformemente en un conjunto de puntos S, si existe una serie de términos positivos convergente cuyos términos acotan (en valor absoluto) a los términos de la serie de funciones en cada punto de S. En otras palabras, tiene que existir una serie numérica $\sum M_n$ convergente tal que $0 \leq |f_n(x)| \leq M_n$ para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$ y todo x de S.

Consideremos entonces una serie de potencias que, por simplicidad, tomaremos centrada en $x_0 = 0$ [el razonamiento sería extensible para cualquier otro centro sin más que hacer un simple cambio de variable $y = (x - x_0)$], esto es $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Sea r el radio de convergencia de esa serie. Comprobaremos que en cualquier compacto $[a, b]$ contenido en $(-r, r)$ esa serie converge uniformemente, [nótese que los extremos del compacto $[a, b]$ pueden acercarse tanto como se quiera a los extremos de $(-r, r)$]. Para ello, sea x cualquier punto de $[a, b]$ y $\omega = \text{máx}\{|a|, |b|\}$. Como $\omega < r$, la serie numérica de términos positivos $\sum M_n = \sum |a_n \omega^n|$ es convergente (recordar que la convergencia de una serie de potencias siempre es absoluta). Por otra parte, como $|x| < \omega$ para todo $x \in [a, b]$, podemos afirmar que $0 \leq |f_n(x)| = |a_n x^n| \leq M_n = |a_n \omega^n|$ para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$. Se verifican entonces todas las hipótesis del criterio mayorante de Weierstrass y podemos afirmar que la serie de potencias es uniformemente convergente en $[a, b]$.

El apartado (b) se demuestra a partir del teorema 100 sobre la derivación de series funcionales. Para ello hemos de probar que las series de potencias verifican las hipótesis de ese teorema, que son dos, en el intervalo de convergencia: La primera es que la serie tiene que ser convergente en al menos un punto de dicho intervalo. Una serie de potencias $\sum a_n(x-x_0)^n$ la verifica trivialmente, pues x_0 está siempre dentro del intervalo de convergencia y en ese punto tenemos una serie de ceros. La segunda es que la serie de funciones derivadas tiene que converger uniformemente. Esa serie de funciones derivadas sería $\sum n\, a_n(x-x_0)^{n-1}$, que es otra serie de potencias y por lo tanto, como acabamos de demostrar, también converge uniformemente. Habría que ver, además, que el radio de convergencia es el mismo. Esto es relativamente sencillo aplicando la fórmula del radio que se obtiene a partir del criterio del cociente (ver teorema 101). Llamando $f(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$ a la serie original tenemos que, por definición:

$$r[f(x)] := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Mientras que para la serie de derivadas se obtiene que:

$$r[f'(x)] = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{n+1}\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = r[f(x)]$$

Por lo tanto, efectivamente, ambas series tienen el mismo radio de convergencia.

Una consecuencia importante de lo que acabamos del ver es que, al también ser $f'(x) = \sum n\, a_n(x-x_0)^{n-1}$ una serie de potencias, se le puede aplicar el mismo razonamiento que a $f(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$. Es decir, su derivada, que es $f''(x)$, es otra serie de potencias que converge uniformemente en el mismo intervalo que $f'(x)$, que a su vez es el mismo que el de $f(x)$. Procediendo recursivamente, es claro que $f(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$ es infinitamente derivable en (x_0-r, x_0+r), es decir, es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en (x_0-r, x_0+r). Además, las derivadas de cualquier orden de $f(x)$ tendrán todas el mismo radio de convergencia r. Con ello se demuestra el apartado (d) del teorema.

5.14. Serie de Taylor.

El teorema 102 que acabamos de enunciar y demostrar tiene además una relación directa con el desarrollo en serie de Taylor que nos va a permitir generalizar y formalizar algunas de sus propiedades que ya hemos ido comentando tanto en el Tema 4 como en este tema. Para ello comencemos considerando una serie de potencias genérica $\sum_{n=0}^\infty a_n(x-x_0)^n$ con un cierto radio de convergencia r. Como sabemos, esa serie converge uniformemente en (x_0-r, x_0+r) a una función límite que llamaremos $f(x)$. También sabemos que $f(x)$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$, y que todas sus derivadas son a su vez series de potencias que convergen uniformemente en el mismo intervalo que $f(x)$. Esas derivadas son:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^\infty n a_n(x-x_0)^{n-1}, \quad f^{(2)}(x) = \sum_{n=2}^\infty n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^\infty \frac{n!}{(n-k)!}a_n(x-x_0)^{n-k}$$

De estas expresiones de deduce que la derivada de orden k en x_0 es:

$$f^{(k)}(x_0) = \sum_{n=k}^\infty \frac{n!}{(n-k)!}a_n(x_0-x_0)^{n-k} = k!\,a_k + (k+1)!a_{k+1}(x_0-x_0) + \ldots = k!a_k$$

Por lo tanto $a_k = f^{(k)}(x_0)/k!$ y la serie se puede escribir como

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Lo cual demuestra, como ya habíamos apuntado de forma intuitiva al hablar del polinomio y de la serie de Taylor anteriormente, que si una función es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno de un punto x_0, se puede escribir (para un determinado radio de convergencia) como una serie de potencias construida a partir de sus derivadas en dicho punto. A continuación enunciaremos este resultado y algunas de las propiedades de la serie de Taylor que ya hemos estudiado de un modo más formal.

Definición 79 *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase infinito en I, es decir, $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$, siendo I un intervalo abierto que podremos escribir de la forma $(c-\delta, c+\delta)$. Entonces es posible construir la serie*

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k,$$

a la cual se denomina serie de Taylor generada por f en torno a c. Para indicar que f genera esta serie escribimos

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

Nos interesa poder determinar cuando la serie generada por una función coincide con la propia función, es decir, cuando podemos sustituir el símbolo $\sim$ por $=$ en la expresión anterior. La fórmula de Taylor (teorema 67) garantiza que si $f \in \mathcal{C}^\infty$ en el intervalo cerrado $[a,b]$ y si $c \in [a,b]$, entonces para cada $x \in [a,b]$ y, puesto que todas las derivadas existen, también para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ se verifica que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x-c)^n,$$

siendo x_1 un punto interior del intervalo abierto que une x con c, y depende de x, de c y de n. Por lo tanto, la condición necesaria y suficiente para que la serie de Taylor converja a $f(x)$ es que el siguiente límite se anule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x-c)^n = 0.$$

Aunque evaluar este límite es en general difícil porque desconocemos el valor de x_1, en la práctica suele ser posible encontrar una cota superior de $f^{(n)}(x_1)$ y entonces podemos demostrar que el límite anterior es cero. En efecto, si existe una constante M positiva tal que $|f^{(n)}(x)| \leq M^n$ para todo $x \in [a,b]$ podremos escribir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x-c)^n \leq \lim_{n\to\infty} \frac{|f^{(n)}(x_1)|}{n!}(x-c)^n \leq \lim_{n\to\infty} \frac{M^n}{n!}(x-c)^n = 0.$$

En otras palabras, la serie de Taylor de una función converge si su n-ésima derivada no sobrepasa la n-ésima potencia de algún número positivo. Esto ya lo hemos visto en el teorema 91, aunque lo estábamos formulando en el contexto de series numéricas (no series de funciones). A continuación damos otra versión, pero el teorema es esencialmente el mismo.

Teorema 103 *Sea $f \in \mathcal{C}^\infty$ en $[a,b]$ y sea $c \in [a,b]$. Supongamos que existe un entorno $B(c)$ y una constante M (que puede depender de c) tal que $|f^{(n)}(x)| \leq M^n$ para cada $x \in B(c) \cap [a,b]$ y cada $n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces para cada $x \in B(c) \cap [a,b]$ se cumple*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

La ventaja de la que disponemos ahora es que, en lugar de aplicar este teorema para comprobar en que puntos el resto de la fórmula de Taylor tiende a cero, podemos aplicar las fórmulas del radio de convergencia del teorema 101 para determinar de una forma directa la región de convergencia de la serie de Taylor. Veámoslo con un ejemplo

Ejemplo:

Consideremos una función cuyo desarrollo en serie de Taylor ya hemos estudiado, por ejemplo la función exponencial $f(x) = e^x$ y $c = 0$. Sabemos que $f^{(n)}(x) = e^x$, de modo que tomando el centro de la serie en el punto $c = 0$ tenemos que $f^{(n)}(0) = 1$. Por lo tanto la función genera la siguiente serie de Taylor entorno a $c = 0$:

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{k!}(x-c)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$$

Si calculemos su radio de convergencia mediante el criterio del cociente obtenemos: $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$. Es decir, la serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

Este resultado es coherente con el hecho de que, como ya hemos demostrado anteriormente, el resto de la fórmula de Taylor tiende a cero para todo x. Repitamos aquí el razonamiento correspondiente: $R_n(x) = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_1)(x-c)^n = \frac{1}{n!}e^{x_1}x^n$, con $x_1 \in (0,x)$ o $x_1 \in (x,0)$. En esta expresión e^{x_1} es una constante y $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ para cualquier x, pues el factorial crece siempre más rápido que la potencia n-ésima de un número. Deducimos entonces que el resto tiende a cero en todo caso cuando n tiende a infinito, y la serie de Taylor generada por e^x es una "fiel" representación[4] de la función para todo $\mathbb{R}$.

[4] Algunos autores definen la función exponencial precisamente a partir de esa serie de potencias.

5.15. Ejercicios.

1. Hallar una serie cuya suma parcial n-ésima valga $\dfrac{n}{n+1}$ para $n = 1, 2, \ldots$.

2. Probar que el recíproco de cualquier número natural es la suma de una serie geométrica que empieza con el recíproco del número siguiente.

3. Probar que las siguientes series son convergentes y calcular su suma:

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$$

Indicación: Las dos están relacionadas con series telescópicas. En el caso (b) úsese la identidad trigonométrica $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = [\operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta)]/[1 + \operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta)]$ para demostrar su carácter telescópico.

4. Demostrar la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ dada por

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

Indicación: demostrar previamente que los elementos de la sucesión $\{x_n\}$ coinciden con las sumas parciales S_{2n-1} de la serie alternada $\sum(-1)^{n+1}a_n$, donde

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}, \quad a_3 = \frac{1}{2}, \quad a_4 = \int_2^3 \frac{dx}{x} \quad , \ldots, \quad a_{2n-1} = \frac{1}{n}, \quad a_{2n} = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}$$

5. Demostrar:

$$(a) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = 1 \qquad (c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{4}$$

Indicación: en los casos (a) y (c) descomponer el término general de la serie en suma de fracciones simples, para luego obtener una expresión simplificada de la suma parcial k-ésima y calcular su límite. La serie (b) es telescópica (sacar $\sqrt{n}$ factor común en el denominador).

6. Considérese la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_r(n)}{q_s(n)}$, donde $p_r(n)$ y $q_s(n)$ son polinomios en n, de grados r y s respectivamente. Demostrar que dicha serie es convergente si $s > r+1$ y divergente si $s \le r+1$.

7. Demostrar que las dos series siguientes son convergentes.(Sugerencia: usar el criterio de la integral).

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} n}{1+n^2} \qquad (b) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^s}, \quad s > 1$$

8. Estudiar la convergencia o divergencia de las siguientes series. [Sugerencia: usar el criterio de comparación por paso al límite. En el apartado (a) usar como referencia la serie del apartado (b) del ejercicio anterior tomando $s = 2$. En el apartado (b) usar como referencia la serie del apartado (a)].

$$(a) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n\sqrt{n+1}} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n-1}\log(4n+1)}{n(n+1)}$$

9. Estudiar la convergencia o divergencia de las siguientes series. (Sugerencia: usar el criterio del cociente o el de la raíz).

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)} \qquad (b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{2n-1} \qquad (c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \qquad (d) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$$

10. Estudiar la convergencia o divergencia de las siguientes series:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\sin^2 nx}{n^n} \quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n} \quad (c)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad (d)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$$

$$(e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2} \quad (f)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt[n]{n}\sin\frac{1}{n} \quad (g)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi+\sin^n(n+1)}{\pi^n+n^2}$$

$$(h)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{2n}-\sin n} \quad (i)\ \sum_{n=1}^{\infty}n^3e^{-n} \quad (j)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+4}}{(n+1)^2} \quad (k)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-e)^n}{n!}$$

11. Demostrar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{n^a+1}-\sqrt{n^a}\right)$ converge para $a>2$ pero diverge para $a=2$.

    Indicación: aplicar el criterio de comparación por paso al límite, tomando como referencia la serie armónica.

12. Sea $\sum a_n$ una serie convergente de términos positivos. Razona si entonces $\sum a_n^2$ es convergente o no.

13. Calcula la suma de $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{e^n}$.

14. ¿La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln\left[2\cosh(n)\right]}$ es divergente o convergente?. Si es convergente, ¿esa convergencia es absoluta o condicional?

15. Estudiar para que valores de x sería convergente la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(e^x-1)e^{-nx}$. Para esos valores, calcula su suma.

16. Demostrar que la suma de las siguientes series es el valor indicado. (Sugerencia: utilícese el resultado $\sum x^n/n! = e^x$).

$$a)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}=1 \qquad b)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n!}=2e-3$$

$$c)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)(n+1)}{n!}=e+1 \qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{n!}=(x^2+x)e^x$$

17. Estudia la convergencia de las siguientes series. Si son convergentes, calcula su suma

$$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{(n+1)}\frac{n}{3n-1} \qquad (b)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-2)!}$$

18. Estudiar el carácter de las series: (*Indicación:* en el apartado (a) usa el criterio de comparación por paso al límite utilizando como referencia la función zeta de Riemann, $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, y en el apartado (b) aplica el criterio de la raíz y el hecho de que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$).

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)^2 \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{2n}x^n, \quad x>0.$$

19. Deducir un método general para sumar las series de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(n)}{n!}$ donde $p(n)$ es un polinomio de grado k en n, justificando su convergencia. (*Indicación:* Usa el hecho de que todo polinomio en n de grado k, $p(n) = A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + A_3 n^3 + \ldots + A_k n^k$ puede escribirse también de la siguiente forma, $p(n) = B_0 + B_1 n + B_2 n(n-1) + B_3 n(n-1)(n-2) + \ldots + B_k n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$).

20. Una serie aritmético-geométrica tiene la forma $\sum a_n b_n$, donde los a_n son elementos de una progresión aritmética ($a_n = a_0 + nd$), y los b_n son elementos de una progresión geométrica ($b_n = b_0 r^n$). Obtener la forma general de las sumas parciales correspondientes a una serie aritmético-geométrica, y estudiar en qué casos dicha serie es convergente. (*Indicación:* escribe la suma parcial S_{n-1}, réstale rS_{n-1} para obtener $(1-r)S_{n-1}$, despeja de ahí S_{n-1} e intenta buscar el límite cuando n tiende a infinito).

21. Demostrar que la serie armónica alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ es convergente y que su suma es $\log 2$.

    (*Indicación:* la suma parcial S_{2n} tiene n términos positivos y n negativos, sepáralos y escribe S_{2n} en función de sumas parciales de la serie armónica. Luego usa el resultado del ejercicio 4, esto es, $\lim_{n\to\infty} x_n = \gamma$, siendo γ la constante de Euler y $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n$).

22. Se construye una reordenación de la serie armónica alternada tomando, alternativamente, dos términos positivos seguidos de uno negativo para obtener

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

    Demostrar que esta serie converge hacia $\frac{3}{2}\log 2$. (*Indicación:* escribe la suma parcial S_{3n} en función de sumas parciales de la serie armónica y luego usa el resultado del ejercicio 4).

23. Demostrar que si se reordena la serie armónica alternada escribiendo alternativamente p términos positivos y q términos negativos, obtenemos una nueva serie convergente cuya suma es $\log 2 + \frac{1}{2}\log(p/q)$. (*Indicación:* generaliza el método empleado en los dos ejercicios anteriores).

24. ¿A qué función converge la sucesión $f_n(x) = \frac{x^{4n}}{4 + x^{4n}}$? ¿Converge uniformemente?

25. Considérense las series funcionales:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} x^n \qquad (b)\ \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n \qquad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} x^n \qquad (d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$$

$$(e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}(x-1)^n \qquad (f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}, \qquad (g)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1}(x-2)^n \qquad (h)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 \ln(n)}$$

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+3)^2 x^n \qquad (j)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-2)^n \qquad (k)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \log n}{n^3} x^n$$

    Determinar sus radios de convergencia y la naturaleza de la serie en los extremos del intervalo de convergencia. (Indicación: a los efectos del apartado (d) de este ejercicio puede considerarse válida la aproximación de Stirling del factorial de n, $n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$).

26. Considera la serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k 3^{2n-1}}$, donde $k > 0$. Determina en función de k su radio de convergencia y su carácter en los extremos.

27. Suponiendo que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tiene un radio de convergencia igual a 2, calcula el radio de convergencia de las serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^k x^n$. ¿Y las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_{kn} x^{kn}$ y $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n^2} x^{n^2}$, donde k es un entero positivo? ¿Puedes llegar a alguna conclusión sobre su convergencia (por ejemplo, un radio mínimo donde seguro que convergen)?. Justifica tu respuesta.

28. Calcular las series de Taylor generadas por las funciones $\sin x$ y $\cos x$ alrededor del punto $x = 0$ y obtener su rango de validez.

29. Deduce la serie de Taylor en $x = 0$ de la función $f(x) = x^3 + 4x^2 + 1$.

30. Calcular la serie de Taylor generada por la función $\log(1 + x)$ y obtener su rango de validez.

31. Calcula la serie de Taylor de la función $f(x) = \cos^2 x$ centrada en $c = 0$. Determina también su radio de convergencia.
    Consejos: 1) Recuerda la relación trigonométrica $\sin 2x = 2\cos x \sin x$. 2) Saca el primer sumando (el que corresponde a $n = 0$ y representa el valor da función en el centro da serie) fuera del sumatorio: Así lo que tienes que deducir es la fórmula genérica de $f^{(n}(c)$ cuando $n \geq 1$, lo que es más sencillo que si tuvieses que incluir en esa forma genérica el término con $n = 0$.